

ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE • BAND 35 • HEFT 5 • JULI 1939

Elektrische Wellen in einem geschichteten Medium

Zur Frage der partiellen Reflexion und zur Berechnung der scheinbaren Höhe von Ionosphärenschichten)*

Von Karl Rawer

(Mit 11 Abbildungen)

Inhalt: Einleitung. — I. Eine Methode zur Lösung der Wellengleichung: § 1. Die hypergeometrische Differentialgleichung; § 2. Die Lösung der Wellengleichung; § 3. Der Verlauf der Dielektrizitätskonstante; § 4. Schief einfallende, ebene Wellen. — II. Numerische Ergebnisse: § 5. Ergebnisse bei vorgegebenem Verlauf der Dielektrizitätskonstante; § 6. Ergebnisse mit Hilfe der Dispersionsformel freier Elektronen; § 7. Anwendung auf die Ionosphäre. — Zusammenfassung. — Literaturverzeichnis.

Abkürzungen:

DK. = Dielektrizitätskonstante,
hg. DG. = hypergeometrische Differentialgleichung,
* = konjugiert komplex,
Re, Im = Real- bzw. Imaginärteil,
arg = Phase einer komplexen Zahl,
const, Konst = Konstante.

Buchstaben:

a_1 = Konst. der Transformation (3,9),
 b_1 = " " " (3,10),
 c = Lichtgeschwindigkeit,
 d_1, d_2 = (3,6),
 e = Ladung des Elektrons,
 $g(\xi) = k^2 \cdot s(\xi) (1,4),$
 $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ = Wellenzahl,
 m = Masse des Elektrons,
 n = Brechungsindex,
 $p(\xi) = \ln(-x) (1,6),$
 $r(\xi) = (1,3; 1,2);$
 r_0 = Integrationskonst. (1,3),
 t = Zeit,
 u = Gruppengeschwindigkeit,

*) D 91; eine Wiedergabe der Resultate (ohne Rechnung) und ihrer Anwendung erscheint in Hochfrequenztechn. u. Elektroak.

- $\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \} = \text{Variable der hg. DG.,}$
 $z = \text{scheinbare Höhe gemessen in Wellenlängen und von der Schicht-}$
 $\quad \text{mitte aus,}$
 $A = \text{Konstante der Epsteintransformation (2,2), (wenn in anderer}$
 $\quad \text{Transformation, hat es Index 0, } \infty),$
 $A_1 = \text{Konst. der Transformation (3,9),}$
 $B_1 = \text{ " " " (3,10),}$
 $D = \text{Durchgangsverhältnis (Amplitude des durchgehenden Anteils}$
 $\quad \text{der Welle zur einfallenden Amplitude),}$
 $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \text{hypergeometrische Funktion } ^{\circ),}$
 $F_1 \dots F_6 = \text{Lösungen der hypergeometrischen Differentialgleichung,}$
 $K_1, K_2, K_3 = \text{Abkürzungen für Kombinationen von } \alpha, \beta, \gamma \text{ (1,5),}$
 $L = \text{Halbwertsbreite der „symmetr. Schicht“ (Abb. 1),}$
 $M = \text{Schichttiefe (3,4),}$
 $N = \text{Übergangstiefe (3,4),}$
 $N_e = \text{Elektronenkonzentration,}$
 $\begin{matrix} P(x) \\ Q(x) \end{matrix} \} = \text{Abkürzungen in der hg. DG. (1,1)}$
 $R = \text{Reflexionsverhältnis (Amplitude des reflektierten Anteils der}$
 $\quad \text{Welle zur einfallenden),}$
 $S = \text{relative Schichtbreite,}$
 $\begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \} = \text{Teil der Gaußsschen } \psi\text{-Funktion } ^{\circ) \text{ vgl. (5,6),}$
 $\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix} \} = \text{die drei Raumkoordinaten (nur in § 4),}$
 $\mathcal{E} = \text{elektrische Feldstärke,}$
 $\mathcal{H} = \text{magnetische Feldstärke,}$
 $\alpha_0 = \text{(nur in § 4) Einfallswinkel,}$
 $\begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \} = \text{Konstante der hg. DG.,}$
 γ
 $\delta = \text{Abkürzung (6,1),}$
 $\varepsilon = \text{Dielektrizitätskonstante (DK.),}$
 $\zeta = \text{Ortsanteil des magnetischen Felds } \mathcal{H}; \quad \left. \begin{matrix} \text{Variable} \\ \eta = \text{ " " elektrischen Felds } \mathcal{E}; \end{matrix} \right\} \text{ in der Wellengleichung,}$
 $x = \frac{4\pi}{\lambda S} = \text{Konstante der Epsteintransformation (2,2); (3,2),}$
 $\lambda = \text{(Vakuum-)Wellenlänge,}$
 $\lambda_1 = \text{Grenzwellenlänge,}$
 $\mu = \text{Konstante der Transformationen (3,9 und 3,10),}$
 $\nu = \text{Stoßzahl/sec,}$
 $\xi = \text{Höhe, gerechnet von der Mitte der Schicht aus,}$
 $\varrho = \text{Krümmungsradius (Abb. 1),}$
 $\tau = \text{Laufzeit eines Signals,}$
 $\varphi = \text{Phase des Reflexionskoeffizienten,}$
 $\psi = \text{logarithmische Ableitung der } \Gamma\text{-Funktion } ^{\circ),}$
 $\omega = \text{Kreisfrequenz,}$
 $\omega_1 = \text{„Grenz(kreis-)frequenz“,}$
 $\Gamma = \text{Gaußsche Gammafunktion } ^{\circ).$

Einleitung

Die Ionosphärenforschung hat ergeben, daß im wesentlichen zwei ionisierte Schichten in der Atmosphäre elektrische Wellen reflektieren können, die *E*-Schicht in etwa 100 km und die *F*-Schicht in etwa 250 km Höhe. Bei den Registrierungen nach der Impulsmethode beobachtet man häufig gleichzeitige Reflexionen an beiden Schichten, und zwar bei fester Frequenz oft über mehrere Stunden hin und bei variabler Frequenz („Durchdrehaufnahmen“) über einen Frequenzbereich bis zu einigen Megahertz. Man nennt diese Erscheinung häufig „partielle Reflexion“, die physikalische Bedeutung dieses Ausdrucks bleibt jedoch meist offen.

Sieht man von Effekten ab, die durch das Erdmagnetfeld eventuell hervorgerufen werden, so gibt es drei Erklärungsmöglichkeiten für diese Tatsache: 1. *Die Reflexion wechselt sehr rasch von einer Schicht zur andern* und umgekehrt. Meist ist das zeitliche Auflösungsvermögen der Apparatur nicht groß genug, um diese Möglichkeit auszuschließen; jedoch hat H. E. Paul¹⁾ durch besonders schnelle Registrierung nachgewiesen, daß zumindest oft wirklich gleichzeitig beide Schichten reflektieren. 2. *Die Ionisierung ist in der Horizontalen inhomogen*; man hat Stellen, wo die Schicht für die betr. Frequenz durchlässig ist, und andere, wo sie reflektiert. Bei den gelegentlich beobachteten breiten Frequenzbereichen „partieller Reflexion“ müssen die horizontalen Konzentrationsunterschiede sehr erheblich sein. Beugung könnte in diesem Falle eine wesentliche Rolle spielen. 3. *Die Ionisierung in der E-Schicht ist in der Horizontalen homogen und hängt nur stetig von der Höhe ab*; dann fragt es sich, ob eine Welle an einer solchen Schicht „echte partielle Reflexion“ erleiden kann, also teilweise durchgehen und teilweise reflektiert werden kann. Diese letzte Möglichkeit soll hier rechnerisch untersucht werden.

Die bisherige Theorie der Reflexion pflegt im allgemeinen die Welle durch einen Strahl zu ersetzen, was nach einer Rechnung von Gans²⁾ berechtigt ist, solange die Dielektrizitätskonstante (DK.) ϵ sich auf die Strecke einer Wellenlänge nicht wesentlich ändert. Gans kommt dann zu dem Resultat, daß keine partielle, wohl aber totale Reflexion möglich ist, und zwar (bei senkrechtem Einfall) dort, wo ϵ verschwindet. Er findet das übrigens ausgehend von einer Wellenbehandlung des Problems, wobei er unglücklicherweise den Verlauf der DK. durch einen speziellen (linearen) ersetzt (den er bis zu negativen Werten der DK. laufen läßt) und damit erhält er dann Totalreflexion. Diese Behandlung des Problems verneint also die Möglichkeit einer partiellen Reflexion an einer Schicht mit veränderlicher DK. (allerdings unter der Voraussetzung eines kleinen Gradienten).

Es ist dann später die Wellenbehandlung auch für kompliziertere Ortsabhängigkeit der DK. durchgeführt worden, nämlich für eine Potenz^{3) 4)}, eine Exponentialfunktion⁵⁾. Eine richtige „Schicht“ behandelt erstmals Hartree⁶⁾, nämlich einen 3eckigen Verlauf; er gibt sogar (für dünne Schichten) Zahlenwerte des Reflexionsverhältnisses an. Außerdem untersucht er die Laufzeit eines Signals, allerdings nur für linearen und quadratischen Verlauf der DK.⁷⁾ Eine viel bessere Annäherung an den für die Ionosphäre zu vermutenden Verlauf behandelt Epstein⁸⁾, auf dessen Arbeit die vorliegende aufbaut, und dessen Resultate hier numerisch ausgewertet werden; seine Methode erlaubt es, auch den Einfluß der Absorption mit in Rechnung zu setzen⁹⁾.

Das Problem ist demnach, eine Lösung der Maxwell'schen Gleichungen zu finden, wobei die DK. in einer Weise vom Ort abhängt, wie man sie für Ionosphärenschichten vermuten kann. Dabei werden hier folgende Voraussetzungen gemacht:

1. Die Wellen sind eben,
2. sie treffen senkrecht auf eine Schicht auf, wo
3. die DK. nur von der Höhe abhängt.
4. In der benutzten Dispersionsformel wird der Einfluß des Erdmagnetfeldes außer acht gelassen. Dagegen wird die Absorption durch Stöße berücksichtigt.

In diesem Fall erhält man aus den Maxwell'schen Gleichungen die Wellengleichung für \mathcal{E} in folgender einfacher Form (wobei harmonische Zeitabhängigkeit vorausgesetzt ist):

$$(0,1) \quad \Delta \eta + k^2 \cdot \varepsilon(\xi) \cdot \eta = 0,$$

wobei angesetzt ist für die elektrische Feldstärke (transversal)

$$(0,2) \quad \mathcal{E} = e^{i\omega t} \cdot \eta(\xi),$$

$$(0,3) \quad k = \frac{\omega}{c}.$$

I. Eine Methode zur Lösung der Wellengleichung

§ 1. Die hypergeometrische Differentialgleichung

Um die Wellengleichung (0,1) zu lösen kann man den Versuch machen, von einer anderen, möglichst allgemeinen, Differential-

⁹⁾ Als diese Arbeit abgeschlossen wurde, erschien in einem Referat von E. V. Appleton, R. Naismith, L. I. Ingram (Proc. Phys. Soc. 51. S. 85. 1939) die Mitteilung, daß Dr. Booker den Fall einer parabolischen Schicht berechnet habe (was eine immerhin bedeutend bessere Annäherung an die Wirklichkeit ist als Hartrees Dreieck). Einige Resultate werden angegeben; anscheinend rechnet Booker ohne Absorption.

gleichung zweiter Ordnung auszugehen, deren Lösung bekannt ist; man sucht dann eine Transformation der Variablen, die auf die Wellengleichung führt. Wegen der sehr allgemeinen Form der Gaussischen hypergeometrischen Differentialgleichung (hg. DG.) gehen wir (mit Epstein) von dieser aus:

$$(1,1) \quad \left\{ \begin{aligned} O &= \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)} \cdot y \\ &\equiv \frac{d^2 y}{dx^2} + P(x) \cdot \frac{dy}{dx} - Q(x) \cdot y \end{aligned} \right.$$

(α, β, γ sind drei willkürliche Konstanten). An Stelle von x, y führen wir nun neue Variable ξ, η ein: $x = x(\xi, \eta)$ und $y = y(\xi, \eta)$. Nach dieser Transformation soll sich in ξ, η die Wellengleichung (0,1) ergeben; wir fordern deshalb das Verschwinden aller Glieder in der transformierten Gleichung, die nicht in die Wellengleichung passen. Das gilt zunächst für nichtlineare Glieder und daraus folgt $\frac{\partial x}{\partial \eta} = 0$ und $y = \eta \cdot r(\xi)$. Danach haben wir die Transformation:

$$(1,2) \quad x = x(\xi); \quad y = \eta \cdot r(\xi).$$

Außerdem tritt in der Wellengleichung das Glied mit $\partial \eta / \partial \xi$ nicht auf und daraus ergibt sich die Forderung:

$$O = 2 \frac{dr}{d\xi} \cdot \frac{dx}{d\xi} - r(\xi) \cdot \left(\frac{d^2 x}{d\xi^2} - P(x) \cdot \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 \right).$$

Man kann also die Funktion $x = x(\xi)$ noch beliebig wählen und muß dann y bzw. $r(\xi)$ aus dieser Gleichung bestimmen. Wenn man sie integriert, erhält man:

$$(1,3) \quad r(\xi) = r_0 \cdot x^{-\frac{\gamma}{2}} \cdot (1-x)^{-\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}} \cdot \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^{1/2}$$

(r_0 ist eine Integrationskonstante). Mit diesem Wert für r wende ich nun die Transformation (1,2) auf die hg. DG. an und erhalte

$$O = \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \left(P \cdot \frac{dx}{d\xi} \cdot \frac{dr}{d\xi} / r + \frac{d^2 r}{d\xi^2} / r - Q \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 - \left(\frac{dr}{d\xi} / r \right) \cdot \left(\frac{d^2 x}{d\xi^2} / \frac{dx}{d\xi} \right) \right) \cdot \eta.$$

Das ist nun eine Wellengleichung in der Art von (0,1); wir schreiben, indem wir für den Koeffizienten von η die Abkürzung $g(\xi)$ einführen:

$$O = \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + g(\xi) \cdot \eta.$$

Nun interessiert vor allem das Aussehen der Funktion $g(\xi)$; $\left(\frac{dr}{d\xi}/r\right)$ können wir aus der Forderung entnehmen, die uns eben $r(\xi)$ in (1,3) ergab; außerdem wollen wir nun statt P und Q (1,1) wieder α, β, γ benutzen und erhalten:

$$(1,4a) \quad \left\{ \begin{aligned} g(\xi) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{d^2x}{d\xi^2} / \frac{dx}{d\xi} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{d^2x}{d\xi^2} / \frac{dx}{d\xi} \right)^2 - \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 \\ &\quad \cdot \frac{\gamma(\gamma-2) + 2(2\alpha\beta - \gamma(\alpha+\beta-1))x + ((\alpha-\beta)^2 - 1)x^2}{4x^2(1-x)^2} \end{aligned} \right.$$

Faßt man die Glieder etwas anders zusammen, so schreibt man auch:

$$(1,4b) \quad \left\{ \begin{aligned} g(\xi) &= \left[\frac{1}{2} \frac{d^2}{d\xi^2} \ln \frac{dx}{d\xi} - \frac{1}{4} \left(\frac{d}{d\xi} \ln \frac{dx}{d\xi} \right)^2 \right] - \left(\frac{d}{d\xi} \ln x \right)^2 \\ &\quad \cdot \left\{ K_1 + K_2 \frac{x}{1-x} + K_3 \frac{x}{(1-x)^2} \right\}, \end{aligned} \right.$$

dabei ist

$$\begin{aligned} 4K_1 &= \gamma(\gamma-2); & 4K_2 &= 1 - (\alpha-\beta)^2 + \gamma(\gamma-2); \\ 4K_3 &= (\alpha+\beta-\gamma)^2 - 1 \end{aligned}$$

oder

$$(1,5) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1+4K_1} + \sqrt{1+4K_3} - \sqrt{1+4(K_1-K_2)}) \\ \beta &= \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1+4K_1} + \sqrt{1+4K_3} + \sqrt{1+4(K_1-K_2)}) \\ \gamma &= \sqrt{1+4K_1} + 1. \end{aligned} \right.$$

[Die Vorzeichen sind hier zunächst noch nicht eindeutig bestimmt; zur Bestimmung wird die Forderung (2,3a) benutzt]. Schließlich erweist sich später folgende Definition als praktisch:

$$(1,6) \quad p(\xi) = \ln(-x)$$

und wir schreiben dann (1,4) so:

$$(1,7) \quad \left\{ \begin{aligned} g(\xi) &= \frac{1}{2} \left[\frac{d^2p}{d\xi^2} / \frac{dp}{d\xi} - \frac{3}{2} \left(\frac{d^2p}{d\xi^2} / \frac{dp}{d\xi} \right)^2 \right] & („D-Glied“) \\ &\quad - \left(\frac{dp}{d\xi} \right)^2 \left\{ \left(K_1 + \frac{1}{4} \right) - K_2 \frac{\exp.p(\xi)}{1 + \exp.p(\xi)} \right. \\ &\quad \left. - K_3 \frac{\exp.p(\xi)}{(1 + \exp.p(\xi))^2} \right\} & („K-Glied“). \end{aligned} \right.$$

Damit haben wir die hg. DG. in eine Wellengleichung mit ortsabhängiger DK. [deren Form sich aus (1,4) oder (1,7) bestimmt] übergeführt. Aus den bekannten Lösungen der hg. DG. können wir dann Lösungen dieser Wellengleichung erhalten.

§ 2. Die Lösung der Wellengleichung

Die Lösungen der hg. DG. hat schon Gauss⁹⁾ angegeben. Er erhält zunächst eine Potenzreihe:

$$F_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1) \cdot \beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \cdot \beta(\beta+1)(\beta+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \dots$$

Das ist die „hypergeometrische Reihe“; sie konvergiert sicher für $|x| < 1$. Im gleichen Gebiet ist aber auch

$$F_2 = x^{1-\gamma} \cdot F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x)$$

eine Lösung (beide sind linear unabhängig und bilden daher ein Fundamentalsystem).

Nun hat die hg. DG. drei singuläre Stellen, nämlich 0, 1 und ∞ . Für jede dieser Stellen gibt es ein (in deren Nähe konvergierendes) Fundamentalsystem¹⁰⁾:

bei $x = 0$: $F_1 = F(\alpha, \beta, \gamma, x);$

$$F_2 = x^{1-\gamma} \cdot F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x);$$

bei $x = 1$: $F_3 = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - x);$

$$F_4 = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} \cdot F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - x);$$

bei $x = \infty$: $F_5 = x^{-\alpha} \cdot F\left(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1, \frac{1}{x}\right);$

$$F_6 = x^{-\beta} \cdot F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{x}\right).$$

Bisher gaben wir die Lösungen in Form von Reihen an, die in einem bestimmten Bereich nur konvergieren; jede dieser Reihen definiert aber eine analytische Funktion, die über den Konvergenzbereich der Reihe hinaus Lösung der hg. DG. ist. Denken wir uns nun etwa F_5 analytisch fortgesetzt bis in das Konvergenzgebiet von den für F_1 und F_2 angegebenen Reihen (F_j soll jetzt immer die Reihe und ihre analytische Fortsetzung zusammen bedeuten); dann haben wir dort außer den dort „beheimateten“ Funktionen F_1 und F_2 noch eine Lösung F_5 . Weil nun drei Lösungen einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung immer linear abhängig sind, gibt es zwischen diesen 3 Funktionen eine lineare Relation (mit konstanten Koeffizienten); diese Relation gilt für die analytischen Funktionen, gilt also für alle Werte von x , zu denen man die 3 Funktionen fortsetzen kann. Gauss hat einige dieser Relationen schon angegeben, die hier benötigte entnehmen wir bei Schlesinger¹¹⁾:

$$(2,1) \quad \left\{ \begin{aligned} F_5 &= (-1)^{-\alpha} \frac{\Gamma(\alpha - \beta + 1) \cdot \Gamma(1 - \gamma)}{\Gamma(1 - \beta) \cdot \Gamma(1 + \alpha - \gamma)} F_1 + (-1)^{\gamma - 1 - \alpha} \\ &\quad \cdot \frac{\Gamma(\alpha - \beta + 1) \cdot \Gamma(\gamma - 1)}{\Gamma(\gamma - \beta) \cdot \Gamma(\alpha)} \cdot F_2, \end{aligned} \right.$$

Γ bedeutet dabei die Gauss'sche Gammafunktion!

Aus jeder Lösung y der hg. DG. erhalten wir nun durch unsre Transformation auch eine Lösung η der Wellengleichung; zu jedem F_j gibt es so nach (1,2 und 1,3) ein η_j

$$\eta_j = r_0^{-1} x^{\frac{\gamma}{2}} (1-x)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}} \cdot \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot F_j.$$

Epstein*) hat nun erkannt, daß bei der speziellen Transformation (2,2)

$$x = -A \cdot e^{\kappa \xi}; \quad \kappa > 0$$

die im folgenden „Epsteintransformation“ genannt wird, die Relation (2,1) eine einleuchtende physikalische Bedeutung erhält. Mit (2,2) wird nämlich $\frac{dx}{d\xi} = \kappa \cdot x$ und man bekommt asymptotisch für große positive Werte von ξ (große negative Werte von x):

$$(2,3) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_5 &= r_0^{-1} \kappa^{-\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{\gamma-1-2\alpha}{2}} \cdot (1-x)^{\frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{2}} \cdot F(\dots 1/x) \\ &\approx r_0^{-1} \kappa^{-\frac{1}{2}} (-1)^{\frac{\gamma-1}{2}-\alpha} A^{\frac{\beta-\alpha}{2}} \cdot \exp. \left(\frac{\beta-\alpha}{2} \kappa \xi \right). \end{aligned} \right.$$

[In der hypergeometrischen Reihe $F(\dots 1/x)$ kann man sich hier aufs erste Glied, 1 nämlich, beschränken.] Ähnliche Entwicklungen erhält man für η_1 und η_2 in der Nähe von $x=0$ (für sehr große negative Werte von ξ):

$$(2,3) \quad \left\{ \begin{aligned} \eta_1 &= r_0^{-1} \kappa^{-\frac{1}{2}} (-A)^{\frac{\gamma-1}{2}} \cdot \exp. \left(\frac{\gamma-1}{2} \kappa \xi \right); \\ \eta_2 &= r_0^{-1} \kappa^{-\frac{1}{2}} (-A)^{\frac{1-\gamma}{2}} \cdot \exp. \left(\frac{1-\gamma}{2} \kappa \xi \right). \end{aligned} \right.$$

Wenn wir nun die Konstanten der hg. DG. so wählen, daß

$$(2,3a) \quad \frac{1-\gamma}{i} \quad \text{und} \quad \frac{\alpha-\beta}{i} \quad \text{reell und positiv}$$

sind, so stellt die oben angegebene asymptotische Näherung für η_5 den Ortsanteil einer ebenen Welle dar, die in Richtung der ξ -Achse läuft; die entsprechende Lösung der zeitabhängigen Wellengleichung ist nämlich:

$$\exp. \left(-i \frac{|\alpha-\beta|}{2} \kappa \xi + i \omega t \right).$$

Entsprechend enthüllt die Näherung (2,3) für große negative ξ η_1 als in Achsenrichtung laufende und η_2 als entgegengesetzt laufende ebene Welle.

Aus der Verknüpfung (2,1) der drei hypergeometrischen Funktionen wird aber (einfach durch Erweitern mit r^{-1}) eine entsprechende der 3 Lösungen der Wellengleichung η_j . η_5 ist also für große positive ξ -Werte eine ebene Welle und verfolgt man es nach rückwärts, so

entpuppt es sich (auf der anderen Seite der ξ -Achse) als aus zwei Wellen zusammengesetzt. Physikalisch beschreibt man diesen Zusammenhang anders, indem man in Richtung der Welle mitgeht: eine Welle η_1 fällt ein und zerlegt sich beim Passieren der Gegend mit veränderlicher DK. in eine durchgehende η_3 und eine reflektierte η_2 . Unsere Relation (2,1) gibt uns das Reflexions- bzw. Durchgangsverhältnis R bzw. D nach Amplitude und Phase. Im Falle der Transformation (2,2) wird also [wenn man noch mit Epstein⁶⁾ $A = 1$ wählt durch entsprechende Wahl des Nullpunkts von ξ]:

$$(2,4) \quad \left\{ \begin{array}{l} R = \frac{\Gamma(\gamma - 1) \cdot \Gamma(1 - \beta) \cdot \Gamma(1 + \alpha - \gamma)}{\Gamma(1 - \gamma) \cdot \Gamma(\gamma - \beta) \cdot \Gamma(\alpha)}; \\ D = \frac{\Gamma(1 - \beta) \cdot \Gamma(1 + \alpha - \gamma)}{\Gamma(1 - \gamma) \cdot \Gamma(\alpha - \beta + 1)}. \end{array} \right.$$

Als Lösung unsrer Wellengleichung hatten wir zunächst hypergeometrische Funktionen erhalten (noch multipliziert mit r^{-1}), die uns auch den Verlauf der Welle etwa im ionisierten Medium beschreiben, jedoch viel zu wenig handlich sind zur Berechnung numerischer Ergebnisse. Wir können nun die Reflexionsverhältnisse studieren nur unter Zuhilfenahme von Gammafunktionen.

Bei der soeben gegebenen Herleitung der Reflexionsverhältnisse ist ersichtlich nur das asymptotische Verhalten der Transformationsfunktion benutzt worden. Es muß diese Funktion daher gar nicht im ganzen ξ -Bereich von der Epsteinschen Art sein, wenn sie sich nur weit draußen beiderseits einer solchen asymptotisch nähert. Immer dann nämlich erhält man als asymptotische Lösung der Wellengleichung die ebenen Wellen (2,3).

Nur das asymptotische Verhalten der Transformationsfunktion ist also festgelegt, im endlichen ist sie noch weitgehend beliebig. Allerdings muß sie sich auch dort noch einigen Bedingungen fügen, die sich aus physikalischen Gründen ergeben, daraus nämlich, daß $g(\xi)$ in (1,4) der DK. proportional sein soll; man wird daher Unendlichkeitsstellen von $g(\xi)$ im allgemeinen ausschließen. Wie aus (1,4a) hervorgeht, muß man die Stellen $x = 0$ bzw. 1 meiden und außerdem darf $dx/d\xi$ bei einem endlichen ξ nicht verschwinden (sonst bleibt die Ableitung des \ln nicht endlich) und auch nicht unendlich werden [wegen des zweiten Terms in (1,4b)]. Weiter wird man aus physikalischen Gründen fordern, daß die ganze Achse durch (1,2) abgebildet wird. Zusammenfassen kann man das in die Forderung:

$$(2,5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(\xi) \text{ soll monoton sein und die ganze } \xi\text{-Achse abbilden} \\ \text{auf das Stück der } x\text{-Achse zwischen } 0 \text{ und } -\infty. \end{array} \right.$$

Daß hier gerade die singulären Stellen 0 und ∞ benutzt wurden ist willkürlich: man kann dieselben Resultate erhalten durch Verknüpfen von 0 und 1 oder von 1 und ∞ .

Wenn man nun eine beliebige Transformation anwendet, die unsre Forderungen erfüllt, so verhält sie sich also etwa für große negative ξ wie $-A_0 \exp. \kappa_0 \xi$ und auf der andern Seite wie $-A_\infty \exp. \kappa_\infty \xi$ für große positive ξ . Wieder erhält man asymptotisch (2,3), wobei nun nur noch die entsprechenden Indizes zuzufügen sind; wieder kann A_0 durch Wahl des Nullpunkts zu 1 gemacht werden. Jedoch kürzen sich nun nur in R die verschiedenen Konstanten aus (2,3), in D bleiben sie stehen; aus (2,5) wird

$$(2,6) \quad \begin{cases} R = \frac{\Gamma(\gamma-1) \cdot \Gamma(1-\beta) \cdot \Gamma(1+\alpha-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma) \cdot \Gamma(\gamma-\beta) \cdot \Gamma(\alpha)}; \\ D = \left(\frac{\kappa_0}{\kappa_\infty}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{A_\infty^{\frac{\beta-\alpha}{2}} \Gamma(1-\beta) \cdot \Gamma(1+\alpha-\gamma)}{\Gamma(1-\gamma) \cdot \Gamma(\alpha-\beta+1)}. \end{cases}$$

Der A -Faktor stellt nur eine Phasenkorrektur dar [denn nach (2,3a) ist der Exponent rein imaginär]. Die Bedeutung des andern Zusatzfaktors wird sich im nächsten Paragraphen ergeben.

§ 3. Der Verlauf der Dielektrizitätskonstante

Die im vorigen Paragraphen angegebenen Formeln lösen die Wellengleichung (0,1), in der $k^2 \varepsilon(\xi)$ sich verhält wie die Funktion $g(\xi)$. Wir wollen uns nun überlegen, wie diese Funktion, die doch die Ortsabhängigkeit der DK. darstellt, aussehen kann in den Fällen, die unserer Rechnung zugänglich sind. Zunächst im einfachsten Fall der

A. Epsteinschen Transformation (2,2)

Gl. (1,7) gibt uns $g(\xi)$, d. h. $k^2 \varepsilon(\xi)$ an. Im Fall der Transformation (2,2) wird aus (1,6): $p = \kappa \xi$. Es verschwindet das D -Glieder von (1,7) und wir erhalten (wieder mit $A = 1$):

$$(3,1) \quad \varepsilon(\xi) = -\frac{\kappa^2}{k^2} \left\{ \left(K_1 + \frac{1}{4} \right) - K_2 \frac{e^{\kappa \xi}}{1 + e^{\kappa \xi}} - K_3 \frac{e^{\kappa \xi}}{(1 + e^{\kappa \xi})^2} \right\}.$$

Wir wollen uns die ξ -Achse von links nach rechts laufend vorstellen, „links“ heißt also nun „für große negative ξ “, analoge Bedeutung hat „rechts“. Hier (3,1) nun nimmt ε links den Wert $-\frac{\kappa^2}{k^2} \left(K_1 + \frac{1}{4} \right)$ an, rechts $-\frac{\kappa^2}{k^2} \left(K_1 + \frac{1}{4} - K_2 \right)$. Dazwischen liegt ein Gebiet, in dem ε sich ändert, seine Breite ist gegeben durch $1/\kappa$ etwa; daher wollen wir eine „relative Schichtbreite“

$$(3,2) \quad S = 2 \frac{k}{\kappa} = \frac{4\pi}{\lambda \kappa}$$

einführen. S mißt die Schichtbreite in Wellenlängen, die Breite in Kilometern ist $\lambda \cdot S$. Durch diese Angabe ist auch die anschauliche Bedeutung der Konstanten α in Epsteins Transformation gegeben. Wir wollen im folgenden nun immer annehmen, daß ϵ links 1 wird. Dazu muß man dann K_1 passend wählen, nämlich:

$$(3,3) \quad K_1 = -\frac{1 + S^2}{4}.$$

Von Vorteil sind noch folgende zwei Einführungen:

$$(3,4) \quad K_3 = -S^2 M; \quad K_2 = -\frac{S^2}{4} \cdot N.$$

Damit erhalten wir nämlich statt (3,1):

$$(3,5) \quad \epsilon(\xi) = 1 - N \frac{e^{\alpha \xi}}{(1 + e^{\alpha \xi})} - M \frac{4 e^{\alpha \xi}}{(1 + e^{\alpha \xi})^2}.$$

Das zweite Glied bedeutet einen „monotonen Übergang“ von der DK. 1 zu $(1 - N)$; das dritte eine „symmetrische Schicht“ die (bei positivem M) als niedrigsten Wert der DK.

$\epsilon_{\min} = (1 - M)$ an der Stelle $\xi = 0$ erreicht.

Ich nenne daher M „Schichttiefe“ und N

„Übergangstiefe“. Diese beiden Grundformen

sind in Abb. 1 gezeichnet; man kann sie mit

beliebigen Konstanten linear kombinieren.

Aus der Abbildung ist auch die Bedeutung

der Schichtbreite $\lambda \cdot S$ ersichtlich. Für die

Frage der partiellen Reflexion dürfte im Fall

der „symmetrischen Schicht“ der Verlauf der

DK. in der Nähe des Minimums entscheidend

sein; man kann ihn etwa durch den Krü-

mungsradius ρ der Kurve in Abb. 1 angeben.

Man berechnet ihn aus (3,5) als $\rho = M \frac{(\lambda S)^2}{8 \pi^2}$.

Schließlich soll noch die Halbwertsbreite L

der symmetrischen Schicht angegeben werden;

sie beträgt $0,281 \lambda S = L$.

Wir berechnen noch den Zusammenhang

der eben definierten Schichtdaten mit den Konstanten der hg. DG.

Aus den Definitionen (3,2 bis 3,4) folgt zunächst:

$$(3,6) \quad \begin{cases} i S = \sqrt{1 + 4 K_1}; & i S \sqrt{1 - N} = \sqrt{1 + 4(K_1 - K_2)} \\ \sqrt{1 + 4 K_3} = \sqrt{1 - 4 S^2 M} = 2(d_2 + i d_1). \end{cases}$$

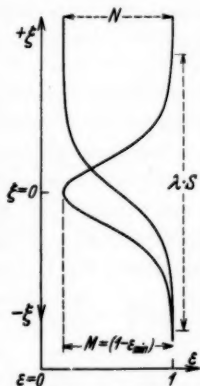


Abb. 1. Schichtverlauf nach Epstein.
(DK. ϵ abhängig von der Höhe ξ)

(Die letzte Zeile definiert d_1 und d_2 als Imaginär- und Realteil der Wurzel!) Mit diesen Werten gehen wir nun in Gl. (1,5) ein und erhalten:

$$(3,7) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} + d_2 + \frac{1}{2} i S (1 - \sqrt{1 - N}) + i d_1, \\ \beta = \frac{1}{2} + d_2 + \frac{1}{2} i S (1 + \sqrt{1 - N}) + i d_1, \\ \gamma = 1 + i S. \end{cases}$$

B. Allgemeine Transformation

Die Epsteinsche Transformation zeichnet sich dadurch aus, daß bei ihr die Formel für den Verlauf der DK. (1,7) durch den zweiten Faktor des zweiten Terms (K -Glied) allein bestimmt ist (denn das D -Glied fällt weg und der erste Faktor im K -Glied ist konstant). Bei einer allgemeineren Transformation bringt jedoch sozusagen auch die Art der Transformation noch Veränderlichkeit in den Verlauf hinein, wir können demnach zwar die Definitionen dieses Paragraphen beibehalten, sie verlieren aber an anschaulicher Bedeutung. Wir schreiben die allgemeine Transformation wie in (1,6)

$$(3,8) \quad x = -\exp. (p(\xi)).$$

Damit rechts wie links asymptotisch die Epsteinsche Transformation herauskommt, fordern wir

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} p(\xi) = x_0 \xi; \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} p(\xi) = x_\infty \xi + \ln A_\infty.$$

Dann nämlich hat man links die gewünschte Transformation mit x_0 , $A_0 = 1$ (durch Wahl des ξ -Nullpunkts!) und rechts mit x_∞ , A_∞ . Den zugehörigen Verlauf der DK. gibt

$$(1,7) \quad \begin{cases} g(\xi) = \frac{1}{2} \left[\frac{d^3 p}{d\xi^3} \frac{dp}{d\xi} - \frac{3}{2} \left(\frac{d^2 p}{d\xi^2} \frac{dp}{d\xi} \right)^2 \right] & (D\text{-Glied}) \\ - \left(\frac{dp}{d\xi} \right)^2 \cdot \left\{ \left(K_1 + \frac{1}{4} \right) - K_2 \frac{\exp. p(\xi)}{1 + \exp. p(\xi)} - K_3 \frac{\exp. p(\xi)}{(1 + \exp. p(\xi))^2} \right\} & (K\text{-Glied}). \end{cases}$$

Das D -Glied verschwindet links wie rechts und man sieht (wieder wählen wir K_1 nach 3,2 und 3,3; links wird dann $g = k^2$ also $\varepsilon = 1$): rechts wird $\varepsilon = \left(\frac{x_\infty}{x_0} \right)^2 (1 - N)$. Sollte N verschwinden, so gibt $\frac{x_\infty}{x_0}$ die Größe $\sqrt{\varepsilon}$, also den Brechungsindex rechts, an.

Die Reflexionsverhältnisse im allgemeinen Fall sind in (2,6) schon angegeben. Bis auf die Faktoren bei D sind das die gleichen Werte wie in (2,4) für den Epsteinschen Fall; der Reflexionskoeffizient R

hängt demnach nur von α, β, γ d. h. von K_1, K_2, K_3 ab, und man kann zu jedem durch die Verallgemeinerung gewonnenen Verlauf eine Epsteinsche Schicht mit denselben K -Werten angeben, die dann auch den gleichen Reflexionskoeffizienten hat. Diese Schicht soll *Ersatzschicht* heißen. Für den Durchgang sind dann die Resultate bei der Ersatzschicht nach (2,6) zu modifizieren; es zeigt sich nun die Bedeutung des dortigen Faktors $\left(\frac{x_0}{x_\infty}\right)^{1/2}$, der nach obiger Feststellung die reziproke Wurzel aus dem Brechungsindex n (von rechts) bedeutet. Dieser ist notwendig wegen des Energiesatzes (denn nehmen wir z. B. Verschwinden von N an, so sagt der Energiesatz für die Ersatzschicht aus $|R|^2 + |D|^2 = 1$; weil bei der allgemeinen Schicht jedoch rechts der Brechungsindex nicht 1, sondern n ist, und weil D das Verhältnis der elektrischen Feldstärken angibt, muß er hier bekanntlich lauten $|R|^2 + n |D|^2 = 1$; dafür sorgt aber der Zusatzfaktor).

Nun sollen einige solche Verläufe der DK., allgemeinerer Art, gezeichnet werden und dazu die Ersatzschicht gegeben werden. Wenn die Schichten genügend dick gewählt werden und verlangt wird, daß die DK. einen dementsprechenden Gradienten hat, kann man das D -Glied vernachlässigen. Das ist in den Beispielen getan. Es zeigt sich dann übrigens eine interessante Beschränkung in der Art der Schichten, die unsere Methode zu behandeln gestattet; es kann nämlich (wegen der Monotonie der Transformation) der zweite Faktor im K -Glied höchstens zweimal verschwinden und der erste muß (aus dem gleichen Grund) überhaupt sein Vorzeichen beibehalten. Deshalb erlaubt es auch unsere Verallgemeinerung nicht, Schichten zu behandeln, die mehr als zwei Nullstellen der DK. enthalten.

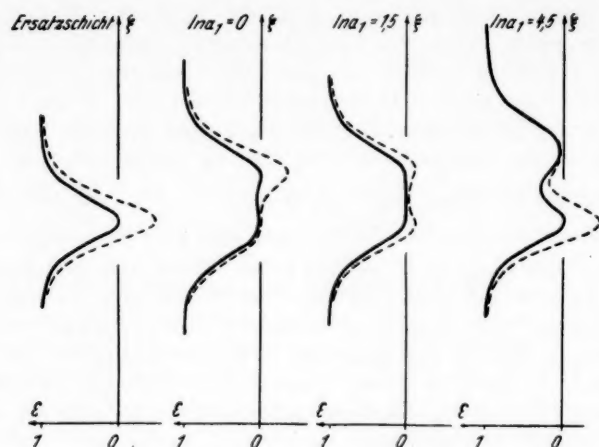
Wir gehen von möglichst übersichtlichen Abänderungen der Transformation (2,2) aus. Eine solche ist der Ansatz:

$$(3,9) \quad p = x_0 \xi + A_1 \frac{e^{\mu \xi}}{a_1 + e^{\mu \xi}}.$$

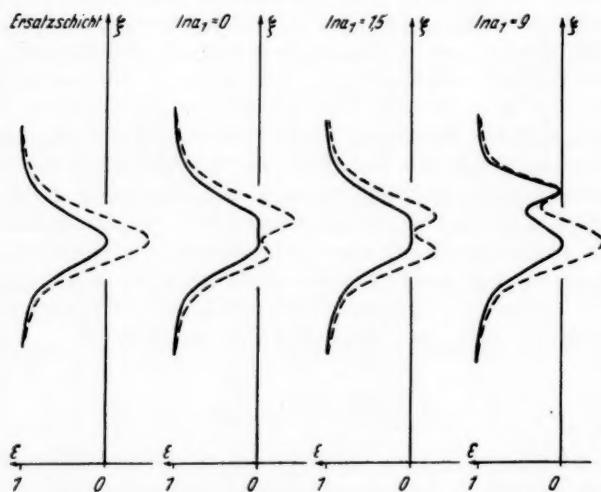
p erreicht hier, wenn man von links nach rechts es verfolgt, wieder die alte Steigung x_0 , hat aber eine additive Konstante A_1 erhalten ($x_\infty = x_0$; $A_\infty = \exp. A_1$). Abb. 2 zeigt verschiedene Möglichkeiten (dabei ist K_3 immer als 0 gewählt, deshalb wird rechts wieder $\varepsilon = 1$). Hier ist es besonders auffällig, daß sich nicht mehr als zwei Nullstellen erreichen lassen.

Eine etwas kompliziertere Transformation ist

$$(3,10) \quad p = x_0 \xi + \frac{B_1}{\mu} \ln(1 + b_1 e^{\mu \xi}).$$



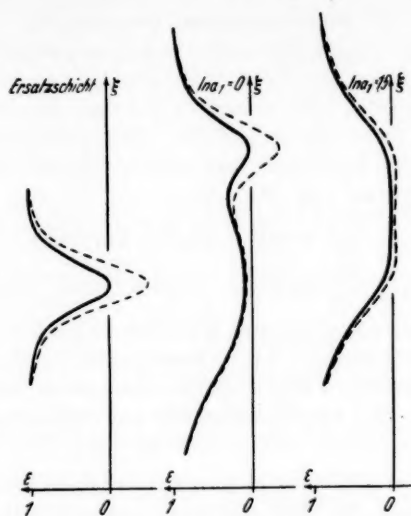
a) $\kappa_0 = 1$; $\mu = 1$; $A_1 = -3$



b) $\kappa_0 = 1$; $\mu = 3$; $A_1 = -1$

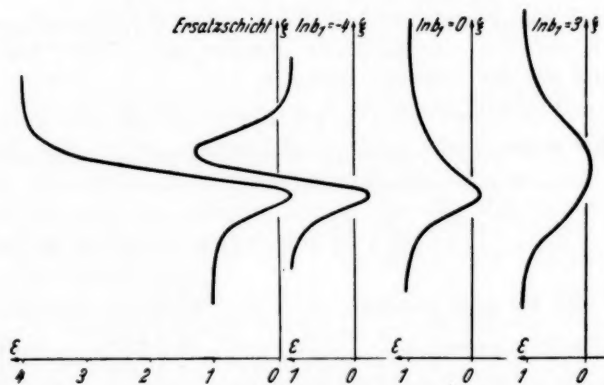
Abb. 2. Beispiele von Schichten, für die die Rechnung durchführbar ist [DK. abhängig von der Höhe nach (3,9)]

Hier erreicht p rechts eine andere Steigung als links, nämlich $(\kappa_0 + B_1) = \kappa_\infty$; außerdem kommt eine additive Konstante hinzu: $A_\infty = b_1^{B_1/\mu}$. In Abb. 3 ist dann K_2 so gewählt, daß die DK. auch



$$c) \kappa_0 = 1; \mu = 1/3; A_1 = -9$$

Abb. 2. Beispiele von Schichten, für die die Rechnung durchführbar ist
[DK. abhängig von der Höhe nach (3,9)]



$$\kappa_0 = 1; \mu = 1; B_1 = -\frac{1}{2}$$

Abb. 3. Beispiele von Schichten, für die die Rechnung durchführbar ist.
[DK. abhängig von der Höhe nach (3,10)]

rechts wieder 1 wird. Wenn man für q eine Summe von Ausdrücken der Art (3,10) ansetzen würde, könnte man ziemlich beliebige Abweichungen von der Linearität für p erreichen.

§ 4. Schief einfallende ebene Wellen

In diesem Paragraphen wollen wir die zweite Voraussetzung der Einleitung fallen lassen. X, Y, Z seien nun die drei räumlichen Achsen, Z entspreche der bisherigen ξ -Achse, die DK. hängt also nur von Z ab, nicht von X und Y . Dann führen die Maxwell'schen Gleichungen nicht mehr auf eine so einfache Wellengleichung wie (0,1), sondern auf [vgl. etwa ¹²⁾!]:

$$(4,1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{E} + \text{grad} \left(\frac{1}{\epsilon} \mathfrak{E}, \text{grad } \epsilon \right), \\ \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} = \Delta \mathfrak{H} - \frac{1}{\epsilon} [\text{rot } \mathfrak{H}, \text{grad } \epsilon]. \end{array} \right.$$

Nun nehmen wir an, es sei die XZ -Ebene Einfallsebene; von Y ist alles dann unabhängig. Wir behandeln die zwei Polarisationsrichtungen getrennt; in beiden Fällen kann man die Abhängigkeit von der Zeit t und von X abspalten und behält eine Gleichung in Z allein.

A. Elektrische Feldstärke parallel der Schichtung: $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_Y$

Wir benutzen die erste Gleichung und setzen darin

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_Y = \eta(Z) \cdot \exp. i(-k \sin \alpha_0 X + \omega t),$$

erhalten

$$(4,2) \quad \frac{d^2 \eta}{dZ^2} + k^2 (\epsilon(Z) - \sin^2 \alpha_0) \cdot \eta = 0.$$

Damit ist die Form unsrer Wellengleichung (0,1) erreicht, wobei die DK. nur um eine Konstante geändert ist. Dieser Fall läßt sich also mit den bisherigen Methoden lösen.

B. Magnetische Feldstärke parallel der Schichtung: $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_Y$

Wir setzen in die zweite Gl. (4,1) ein

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_Y = \zeta(Z) \cdot \exp. i(-k \sin \alpha_0 X + \omega t),$$

erhalten:

$$(4,3) \quad \frac{d^2 \zeta}{dZ^2} - \frac{1}{\epsilon(Z)} \cdot \frac{d\epsilon(Z)}{dZ} \cdot \frac{d\zeta}{dZ} + k^2 (\epsilon(Z) - \sin^2 \alpha_0) \zeta = 0.$$

Führt man als neue Variable $\zeta \cdot \epsilon^{-\frac{1}{2}}$ ein, so erhält man (4,2) mit

$$\left[k^2 (\epsilon(Z) - \sin^2 \alpha_0) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \epsilon(Z)}{dZ^2} / \epsilon(Z) - \frac{3}{4} \left(\frac{d\epsilon(Z)}{dZ} / \epsilon(Z) \right)^2 \right]$$

als Koeffizient des Gliedes nullter Ordnung. Im allgemeinen dürfte das ein komplizierter Ausdruck sein.

II. Numerische Ergebnisse

§ 5. Ergebnisse bei vorgegebenem Verlauf der Dielektrizitätskonstante

Zur numerischen Auswertung der Reflexionsformeln (2,4) werden diese statt in α, β, γ in den Größen S (Schichtbreite), N (Übergangstiefe) und M (Schichttiefe) geschrieben (3,7):

$$(5,1) \left\{ \begin{aligned} R &= \frac{\Gamma(iS) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} - d_2 - i\left(\frac{1}{2}S(1 + \sqrt{1-N}) + d_1\right)\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + d_2 - i\left(\frac{1}{2}S(1 + \sqrt{1-N}) - d_1\right)\right)}{\Gamma(-iS) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} - d_2 + i\left(\frac{1}{2}S(1 - \sqrt{1-N}) - d_1\right)\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + d_2 + i\left(\frac{1}{2}S(1 - \sqrt{1-N}) + d_1\right)\right)}, \\ D &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - d_2 - i\left(\frac{1}{2}S(1 + \sqrt{1-N}) + d_1\right)\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + d_2 - i\left(\frac{1}{2}S(1 + \sqrt{1-N}) - d_1\right)\right)}{\Gamma(-iS) \cdot \Gamma(1 - iS\sqrt{1-N})}. \end{aligned} \right.$$

Im Fall der „symmetrischen Schicht“ ($N = 0$) vereinfacht sich das noch, weil für Gammafunktionen die Relation besteht

$$(5,2) \quad \Gamma(z) \cdot \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

damit erhält man:

$$(5,3) \text{ (falls } N=0) \left\{ \begin{aligned} R &= \frac{\Gamma(iS)}{\Gamma(-iS)} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} - d_2 - i(S + d_1)\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + d_2 - i(S - d_1)\right) \cdot \frac{\cos \pi(d_2 + i d_1)}{\pi}, \\ D &= \Gamma\left(\frac{1}{2} - d_2 - i(S + d_1)\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + d_2 - i(S - d_1)\right) \cdot \frac{\sin \pi S}{\pi}. \end{aligned} \right.$$

Interessieren nur die Beträge, so kann man $|R|^2 = R \cdot R^*$ mit (5,2) weiter vereinfachen und kommt ohne Gammafunktionen aus, sofern d_2 verschwindet (im allgemeinen ist das der Fall, sofern keine Dämpfung vorhanden ist; vgl. § 6!)

Ohne Dämpfung:

$$(5,4) \quad |R|^2 = \frac{\coth^2 \pi d_1}{\coth \pi(d_1 + S) \cdot \coth \pi(d_1 - S)}; \quad |D|^2 = \frac{\sin^2 \pi S}{\coth \pi(d_1 + S) \cdot \coth \pi(d_1 - S)}.$$

(5,4) ergibt $|R|^2 + |D|^2 = 1$, was den Energiesatz bedeutet. Nach (5,4) ist in Abb. 4 aufgetragen die Intensität der reflektierten Welle ($|R|^2$) in Prozenten der einfallenden Intensität abhängig von der Schichttiefe M (für verschiedene relative Schichtbreiten S). Es zeigt sich, daß $M = 1$ ein kritischer Wert ist (das entspricht einer Schicht, bei der in der Mitte die DK. gerade verschwindet). Ist der Schichtverlauf so, daß die DK. eine Strecke weit negativ ist ($M > 1$), so hat man starke Reflexion, im andern Fall ($M < 1$) dagegen schwache. Wird die „Schichttiefe“ M vergrößert, so geht der Umschlag von

schwacher zu starker Reflexion sehr rasch vor sich: man hat praktisch vollständigen Durchgang der Welle durch die Schicht, solange $M < 1$ ist und „praktisch totale“ Reflexion, sobald die DK. irgendwo ver-

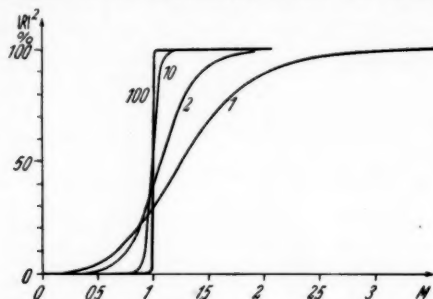


Abb. 4. Intensität der Reflexion an der symmetrischen Schicht ($|R|^2$ abhängig von Tiefe M und Breite S)

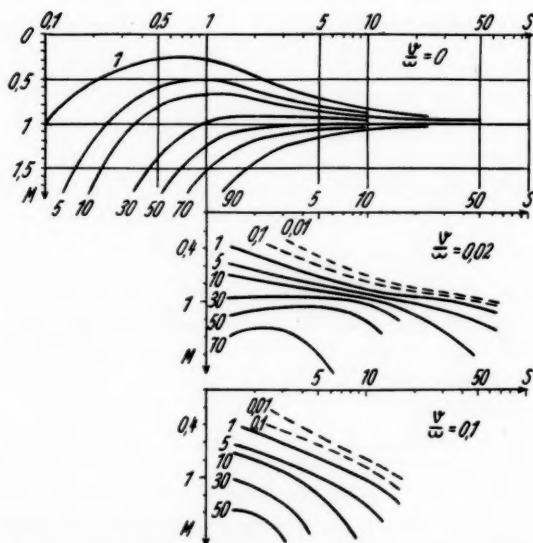


Abb. 5. Kurven konstanter Reflexion für die symmetrische Schicht. (Kurven $|R|^2 = \text{const}$ im SM -Diagramm; Parameter $|R|^2$ in Prozent oben dämpfungsfrei, darunter für zwei verschiedene Stoßzahlen)

schwindet. Je dünner die Schicht, um so weniger ausgeprägt ist dieser Umschlag, um so größer ist längs M der Bereich partieller Reflexion. Grundsätzlich aber gibt es für jeden Wert von S und M einen durch-

gehenden und einen reflektierten Anteil, wirkliche Totalreflexion gibt es nicht an einer symmetrischen Schicht. Ausführlicher stellt Abb. 5 die Verhältnisse dar: aus einer räumlichen Darstellung der reflektierten Intensität abhängig von Schichttiefe M und -breite S sind die Kurven konstanter Reflexion angegeben. Für große Schichtdicken drängen sich die Kurven eng zusammen, der Abfall von starker zu geringer Reflexion findet in einem engen Bereich um $M=1$ (d. h. $\epsilon_{\min}=0$) statt. Eine Reflexion von mehr als 50% ist nur möglich, wenn $M > 1$ ist. (Die unteren Kurvenscharen der Abbildung gelten mit Dämpfung, sie werden im nächsten Paragraphen erläutert.) S bedeutet hier immer die relative Schichtbreite, ist also gemessen in Wellenlängen der einfallenden Strahlung.

Im andern Spezialfall des „monotonen Übergangs“ $M=0$ (hier auch „Übergangsschicht“ genannt) erhält man $d_2 = \pm \frac{1}{2}$ und $d_1 = 0$ und es läßt sich (falls N reell ist, d. h. ohne Dämpfung) wenigstens $|R|^2 = R \cdot R^*$ bedeutend vereinfachen mit (5,2):

$$(5,5) \quad (\text{falls } M=0) \quad \left\{ \begin{array}{l} |R|^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} S (1 - \sqrt{1-N})\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} S (1 + \sqrt{1-N})\right)} \\ |D|^2 = \frac{\sin^2(\pi S)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} S (1 + \sqrt{1-N})\right)} \cdot \left| \frac{\Gamma(1 + iS)}{\Gamma(1 - iS \sqrt{1-N})} \right|^2. \end{array} \right.$$

Das gilt solange $\sqrt{1-N}$ reell ist, d. h. für $N < 1$. Ist jedoch $N > 1$ (dann ist also rechts die DK. negativ), so wird in (5,1) $\frac{i}{2} \cdot \sqrt{1-N}$ reell, und man bekommt beim Reflexionskoeffizienten R im Nenner das konjugiert Komplexe zum Zähler; daher ist hier exakt $|R|=1$; es muß dabei nicht einmal M verschwinden, wenn nur d_1 oder d_2 das tut (d. h. es darf keine Dämpfung vorhanden sein). Man bekommt also wirkliche Totalreflexion, wenn die DK. auf der rechten Seite der Übergangsschicht negativ bleibt. Im Grenzübergang Schichtbreite S nach Null erhält man übrigens aus (5,5) die Fresnelschen Formeln.

Nach (5,5) ist in Abb. 6 (wie in Abb. 4) die Intensität der reflektierten Welle abhängig von der Übergangstiefe N aufgetragen (für verschiedene Schichtbreiten S). Bei $N=1$ beginnt die Totalreflexion; für kleinere N ist die Reflexion sehr gering, sobald die Schichtbreite einige Wellenlängen beträgt; für sehr dünne Schichten nähert man sich dem Wert der Fresnelschen Formeln ($S=0$).

Abb. 7 gibt wieder die dreidimensionale Darstellung $|R|^2$ abhängig von relativer Schichtbreite S und Übergangstiefe N .

Abgesehen vom Betrag der Reflexion läßt sich aber aus ihrer

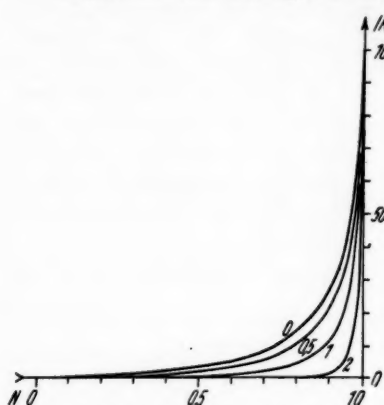


Abb. 6. Intensität der Reflexion am monoton. Übergang
($|R|^2$ abhängig von Tiefe N und Breite S)

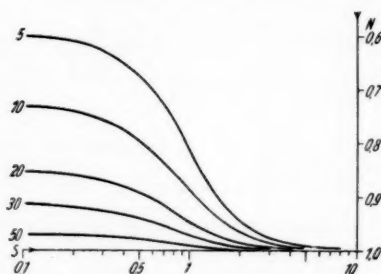


Abb. 7. Kurven konstanter Reflexion für monoton. Übergang
(Kurven $|R|^2 = \text{const}$ im SN -Diagramm;
Parameter $|R|^2$ in Prozent)

Phase φ noch die Laufzeit eines an der Schicht reflektierten Signals entnehmen.

Bekanntlich gibt bei Reflexion einer Schwebung an einem Spiegel $d\varphi/d\omega$ die Verzögerung gegen die mit Lichtgeschwindigkeit berechnete Laufzeit an. In unserem Fall kann man diese Größe berechnen, sofern man aus einer Dispersionsformel den Zusammenhang der Schichtdaten mit der Frequenz entnimmt.

Dazu wird zunächst $\varphi = \arg(R)$ (die Phase des Reflexionsverhältnisses) nach ω differenziert; zunächst differenzieren wir die Gammafunktionen in (5,1) nach ihren Argumenten und dann (mit Hilfe der Dispersionsformel) diese nach ω . Man erhält für die Phase eines Gamma-wertes:

$$\arg(\Gamma(z)) = \text{Im} \ln \Gamma(z) \\ = -\frac{i}{2} \cdot (\ln \Gamma(z) - \ln \Gamma(z^*))$$

Nun ist aber bei der Gammafunktion: $\Gamma^*(z) = \Gamma(z^*)$,

daher $\arg(\Gamma(z)) = -\frac{i}{2} (\ln \Gamma(z) - \ln \Gamma(z^*))$ und die Ableitung nach ω schreibt sich mit der

$$(5,6) \quad \text{Gaußschen } \psi\text{-Funktion} \quad \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \psi(z) = U + iV$$

folgendermaßen

$$(5,7) \quad \frac{d}{d\omega} \arg(\Gamma(z)) = -\frac{i}{2} \left(\psi(z) \cdot \frac{dz}{d\omega} - \psi(z^*) \cdot \frac{dz^*}{d\omega} \right)$$

Da der Reflexionskoeffizient R ein Produkt von Gammafunktionen ist und da sich die Phasen dabei einfach addieren, erhält man für $\frac{d}{d\omega} \arg(R)$ eine Summe von ψ -Funktionen, die noch wie in (5,7) mit den Ableitungen ihrer Argumente multipliziert sind. Das wird sehr umständlich, und daher möge es hier genügen, wenn der Ausdruck für den Fall ($N = 0$) einer symmetrischen Schicht wiedergegeben wird:

$$(5,8) \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \arg R &= \frac{dS}{d\omega} \cdot \left[2 \cdot U(iS) - U\left(\frac{1}{2} - d_2 + i(d_1 + S)\right) \right. \\ &\quad \left. - U\left(\frac{1}{2} + d_2 - i(d_1 - S)\right) \right] \\ &\quad + \frac{d}{d\omega} d_1 \cdot \left[-U\left(\frac{1}{2} - d_2 + i(d_1 + S)\right) + U\left(\frac{1}{2} + d_2 - i(d_1 - S)\right) \right. \\ &\quad \left. + U\left(\frac{1}{2} - d_2 + i d_1\right) - U\left(\frac{1}{2} + d_2 - i d_1\right) \right] \\ &\quad + \frac{d}{d\omega} d_2 \cdot \left[V\left(\frac{1}{2} - d_2 + i(d_1 + S)\right) - V\left(\frac{1}{2} + d_2 - i(d_1 - S)\right) \right. \\ &\quad \left. - V\left(\frac{1}{2} - d_2 + i d_1\right) + V\left(\frac{1}{2} + d_2 - i d_1\right) \right] \end{aligned} \right.$$

Entsprechend kann man bilden $\frac{d}{d\omega} \arg(D)$, das ist dann die Verzögerung, die das durchgehende Signal in der Schicht erfährt:

$$(5,9) \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \arg D &= \frac{dS}{d\omega} \cdot \left[2 \cdot U(iS) - U\left(\frac{1}{2} - d_2 + i(d_1 + S)\right) \right. \\ &\quad \left. - U\left(\frac{1}{2} + d_2 - i(d_1 - S)\right) \right] \\ &\quad + \frac{d}{d\omega} d_1 \cdot \left[-U\left(\frac{1}{2} - d_2 + i(d_1 + S)\right) + U\left(\frac{1}{2} + d_2 - i(d_1 - S)\right) \right] \\ &\quad + \frac{d}{d\omega} d_2 \cdot \left[V\left(\frac{1}{2} - d_2 + i(d_1 + S)\right) - V\left(\frac{1}{2} + d_2 - i(d_1 - S)\right) \right] \end{aligned} \right.$$

Die eben berechneten Zeiten stellen Zeitdifferenzen dar gegen die mit Lichtgeschwindigkeit bis zur Schichtmitte berechnete Laufzeit [das folgt aus der Form der asymptotischen Wellen (2,3)]. Wenn die Reflexion in der Hauptsache schon vor dieser Stelle erfolgt, kann man also in Reflexion auch negative Werte bekommen; das tritt (wie auch die Näherung der Strahlenbehandlung zeigt) ein, wenn die DK. schon genügend weit vor der Schichtmitte durch Null geht (es ist dann $M > 1$).

Im gleichen Fall $M > 1$ liefert (5,9) aber ein noch seltsameres Resultat, nämlich negative „Verzögerungen“ für die durchgehende Welle. (Übrigens liefern die Fresnelschen Formeln für eine planparallele Platte mit negativer DK. etwas ganz Ähnliches!) Dieses

Ergebnis hat jedoch keinen physikalischen Sinn; im Gegenteil, es zeigt, daß unsere Laufzeitberechnung hier falsch wird. Wir haben nämlich nur zwei eng benachbarte Frequenzen berücksichtigt, eine Schwebung also. Ein wirkliches Signal aber braucht ein breiteres Frequenzspektrum. Sommerfeld¹³⁾ hat gezeigt, daß in Gebieten anomaler Dispersion (und ein solches liegt hier vor, solange die DK. negativ ist) die Geschwindigkeit eines Signals immer kleiner als Lichtgeschwindigkeit ist, während die Gruppengeschwindigkeit größer sein kann. Gemessen wird die Signalgeschwindigkeit und deshalb gibt (5,9) hier nicht mehr die wirkliche Laufzeit wieder, sobald M entschieden größer als 1 ist. Unter Zugrundelegung einer für die Ionosphäre geeigneten Dispersionsformel wird im § 7 diese Frage noch einmal erörtert werden.

§ 6. Ergebnisse mit Hilfe der Dispersionsformel freier Elektronen

Wird der Einfluß des Erdmagnetfeldes außer acht gelassen, so liefert die Dispersionstheorie für freie Elektronen¹⁴⁾ als Zusammenhang zwischen Brechungsindex n und Elektronenkonzentration N_e

$$(6,1) \quad \varepsilon = n^2 = 1 - \frac{\delta}{\omega^2 \left(1 - i \frac{\nu}{\omega}\right)} = 1 - \frac{\delta}{\omega^2 + \nu^2} \left(1 + i \frac{\nu}{\omega}\right).$$

Dabei ist $\delta = 4 \pi N_e \frac{e^2}{m}$, e Ladung, m Masse eines Elektrons, ω Kreisfrequenz, ν Stoßzahl/sec der Elektronen mit den neutralen Molekülen.

Der imaginäre Anteil bedeutet eine Dämpfung, und dieser Einfluß soll zunächst betrachtet werden. Nehmen wir an, die Verteilung sei so, daß die Konzentration die Form einer „symmetrischen Schicht“ (Abb. 1) hat, so können wir (6,1) benutzen (die Stoßzahl wird als unabhängig vom Ort angesehen) und schreiben die Verteilung der DK. (entsprechend 3,5):

$$(6,2) \quad \varepsilon = 1 - 4 M \left(1 + i \frac{\nu}{\omega}\right) \frac{e^{\alpha \xi}}{(1 + e^{\nu \xi})^2}.$$

Wie in (3,6) setzen wir

$$(6,3) \quad \sqrt{1 - 4 S^2 M \left(1 + i \frac{\nu}{\omega}\right)} = 2(d_2 + i d_1)$$

und errechnen

$$(6,3a) \quad S^2 M = d_1^2 - d_2^2 + \frac{1}{4}; \quad \frac{\nu}{\omega} = \frac{2 d_1 d_2}{d_1^2 - d_2^2 + \frac{1}{4}}.$$

Damit gehen wir nun in die Formel für die Reflexion (5,3) ein. Die Berechnung wird ziemlich umständlich, weil man hier mit

Gammafunktionen rechnen muß. Die Argumente sind dabei komplex, und dafür gibt es bisher noch keine brauchbaren Tabellen. So wurden zunächst die benötigten Funktionswerte berechnet [mit einer Stirlingschen Formel bzw. mit komplizierteren Formeln, wenn die Argumente klein waren¹⁵⁾]*).

Um die Rechnung zu erleichtern, wurde ein besonders günstiges System von S , d_1 , d_2 -Werten aufgestellt, das einfache Argumente für die Gammafunktion gab und außerdem mehrfache Benutzung der zugehörigen Gammafunktionswerte erlaubte. Die zugehörigen Werte der physikalischen Größen M (Schichttiefe) und ν/ω (relative Stoßzahl) wurden dann aus (6,3a) errechnet. Die Reflexionswerte wurden

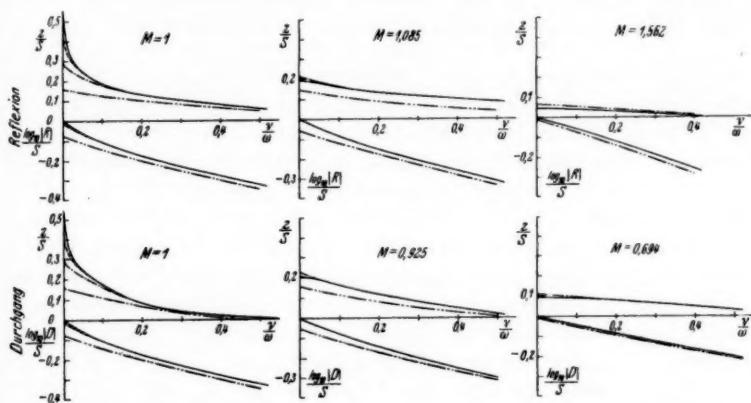


Abb. 8. Scheinbare Höhe einer Schicht und reflektierte Amplitude in Abhängigkeit von der Stoßzahl. (z scheinbare Höhe in Wellenlängen gemessen)

Parameter $S = 250$ —, 50 — — —, 10 - - - - -, 2 - - - - -.

zuerst dargestellt in Abhängigkeit von den erstgenannten Größen, und aus diesen Kurven ergaben sich durch Interpolieren die von den letztgenannten abhängigen Kurven. Von den 6 Bildern in Abb. 8 sind jeweils zwei übereinanderstehend ähnlich, weil jeweils das obere die Reflexionsverhältnisse für eine bestimmte Schichttiefe M (größer als 1) angibt und das untere die Durchgangsverhältnisse für eine Schichttiefe, die entsprechend kleiner als 1 ist. In jedem Bild ist oberhalb der Abszisse die Dämpfungsabhängigkeit der „schein-

* Bei dieser Rechenarbeit hat mich Regierungsrat Prof. P. E. Böhmer (Dresden) durch Anleitung und durch Angabe von schwieriger zu berechnenden Werten weitgehend unterstützt, zusammen mit seinem Doktoranden Dipl.-Ing. W. Meißner.

baren Höhe“ aufgetragen (die später besprochen wird) und unterhalb die Dämpfungsabhängigkeit von $\frac{1}{S} \log_{10} |R|$, bzw. $\frac{1}{S} \log_{10} |D|$. Gezeichnet sind jeweils vier verschiedene Kurven für vier relative Schichtbreiten S . Man sieht, daß diese Kurven annähernd Geraden durch den Nullpunkt sind und weiter, daß sie für verschiedene S -Werte praktisch aufeinanderfallen, außer für sehr dünne Schichten und außer für M -Werte nahe bei 1; unter diesen Einschränkungen gilt deshalb näherungsweise:

$$(6,4) \quad \log |R| \quad \text{proportional} \quad -S \cdot \nu, \text{ wenn } M > 1$$

und

$$(6,5) \quad \log |D| \quad \text{proportional} \quad -S \cdot \nu, \text{ wenn } M < 1.$$

Die Abweichungen von dieser Näherung erstrecken sich gerade auf die Fälle, wo wir merkliche Partialreflexion feststellen werden.

Die räumliche Darstellung: $|R|^2$ abhängig von relativer Schichtbreite S und -tiefe M ist in Abb. 5 außer für den dämpfungsfreien Fall auch noch mit zwei verschiedenen Dämpfungen durchgeführt (in diesen letzten Fällen sind die Kurven durch Interpolation gewonnen und daher für große Reflexionskoeffizienten nicht sehr genau!). Ohne Dämpfung hat man einen um so steileren Abfall von Reflexion zu Durchgang, je breiter die Schicht ist; mit Dämpfung ändert sich bei sehr dünnen Schichten wenig, mit wachsender Schichtbreite überwiegt immer mehr der Dämpfungseinfluß.

Nun wenden wir uns den Laufzeiten zu (5,8 und 5,9). Die Dispersionsformel (6,1) erlaubt uns die Bestimmung der nötigen Ableitungen nach der Frequenz. Die Schichtbreite in Kilometern ist natürlich fest gegeben zu denken (durch die Konzentrationsverteilung), S mißt sie in Wellenlängen, daher ist S/ω konstant,

$$(6,6) \quad \frac{dS}{d\omega} = \frac{S}{\omega}.$$

Mit Hilfe der Dispersionsformel wird (6,3) nach ω differenziert und durch Spaltung in Real- und Imaginärteil erhält man die Ableitungen von d_1 und d_2 . Dabei ist ν als fest zu betrachten, und es tritt links nur noch die Ableitung von M auf. Ein Vergleich von (6,1) und (6,2) für die Werte in der Schichtmitte zeigt, daß $M = \frac{\delta_{\max}}{\omega^2 + \nu^2}$, folglich

$$(6,7) \quad \frac{dM}{d\omega} = -\frac{\delta_{\max}}{\omega^2 + \nu^2} \cdot \frac{2\omega}{\omega^2 + \nu^2} = -M \frac{2}{\omega \left(1 + \left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right)}.$$

Nun sind alle Ableitungen bekannt (die Formeln für $\frac{d}{d\omega} d_1$ und $\frac{d}{d\omega} d_2$ werden ihrer Umständlichkeit wegen hier nicht angeschrieben!) und man kann nach (5,8 und 5,9) die Verzögerungen berechnen — allerdings müssen, wie die Gammafunktion, erst die ψ -Funktionswerte berechnet werden. Außer bei sehr starker Dämpfung ergibt das erste Glied in den erwähnten Gleichungen den größten Beitrag. Die so erhaltenen Verzögerungszeiten werden mit $\frac{c}{2\lambda} = \frac{\omega}{4\pi}$ multipliziert und sind dann die scheinbaren Höhen der Schicht, gemessen in (Vakuum)-Wellenlängen der Frequenz mit der man arbeitet; diese „scheinbare Höhe“ wird mit z bezeichnet und ist immer zu rechnen von der Schichtmitte ab. z/S ist in Abb. 8 abhängig von der Dämpfung (für verschiedene Schichtbreiten und -tiefen) aufgetragen. Wieder mit Ausnahme von M -Werten nahe bei 1 und von dünnen Schichten zeigt sich näherungsweise:

$$(6,8) \quad \left\{ \begin{array}{l} z \text{ proportional der Schichtbreite } S \\ \text{und} \\ \text{wachsende Stoßzahl bewirkt starke Erniedrigung von } z. \end{array} \right.$$

Bisher wurde die Laufzeit durch Integration aus der Gruppengeschwindigkeit u (an jeder Stelle) bestimmt, nach der Formel also¹⁰⁾:

$$\tau = \int_{n=1}^{n=0} \frac{d\xi}{u}.$$

Integriert wird dabei bis zur Reflexionsstelle der Strahlenbetrachtung, d. h. bis zum Verschwinden von n . Aus der Dispersionsformel (6,1) ergibt sich ohne Absorption einfach $u = n \cdot c$, und wenn der Verlauf von n vorgegeben ist, kann man τ bestimmen. In Abb. 9 ist das vergleichsweise ausgeführt für eine „Schicht“ der Form von Abb. 1, die 500 Wellenlängen breit ist. Derselbe Fall wurde zum Vergleich auch nach den hier abgeleiteten strengen Formeln gerechnet, und es ergibt sich Übereinstimmung. Nur für M -Werte nahe bei 1 hat man Abweichungen (wieder sind es gerade die Fälle, wo merkliche Partialreflexion eintritt), und für $M = 1$ ergibt die Näherung eine unendliche Verzögerung, die strenge Rechnung aber einen endlichen Wert. Der Bereich schlechter Übereinstimmung wird bei dünneren Schichten vergrößert, entsprechend dem vergrößerten Bereich partieller Reflexion (vgl. Abb. 4).

Sieht man von der Absorption ab, so kann man für die maximale scheinbare Höhe mit der Stirlingschen Formel einen einfachen Aus-

druck angeben, der für Schichten breiter als etwa 5 Wellenlängen (Halbwertsbreite $L > 1,4$ Wellenlängen) recht gut gilt:

$$(6,9) \quad z_{\max} = \frac{S}{4\pi} (\ln(S) + 1,27) = \frac{L}{1,53 \cdot \lambda} \left(\log_{10} \frac{L}{\lambda} + 1,10 \right).$$

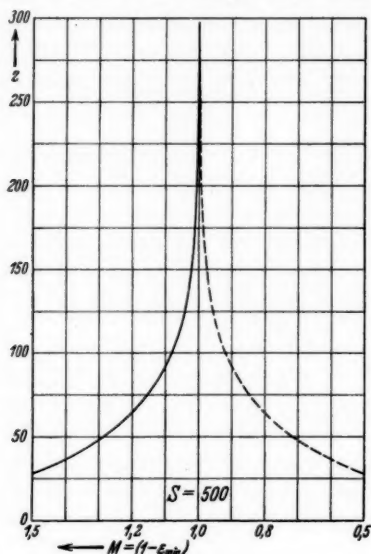


Abb. 9

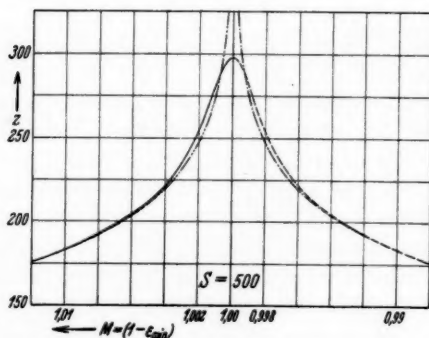


Abb. 9a

Abb. 9. Vergleich der strengen Laufzeitberechnung mit der Näherung. (Scheinbare Höhe abhängig von der Schichttiefe M ; 9a zeigt stark vergrößert einen ganz schmalen Bereich um $M=1$ aus Abb. 9; Ergebnis der strengen Rechnung — für Reflexion, bzw. --- für Durchgang, Ergebnis der Näherung - - - - - bzw. - - - - -)

§ 7. Anwendung auf die Ionosphäre

Um den Vergleich mit den Beobachtungen an der Ionosphäre zu erleichtern wird schließlich noch eine Umrechnung der Resultate aus den §§ 5 und 6 durchgeführt. Es wird nun angenommen, es existiere eine feste Konzentrationsverteilung in der Form der symmetrischen Schicht aus Abb. 1; nun werde die Frequenz der auf die Schicht treffenden elektrischen Wellen variiert; dann nennt man bekanntlich Grenzfrequenz ω_1 diejenige, bei der die DK. in der Schichtmitte verschwindet (M gleich 1 wird). Sehen wir von Dämpfung zunächst einmal ab, so ergibt sich aus (6,1 und 6,2) die Konzentration in der Schichtmitte $\delta_{\max} = \omega_1^2$. Diese Festlegung wird auch mit Dämpfung beibehalten und wir setzen (in Übereinstimmung mit 6,1 und 6,2):

$$(7,1) \quad M = \frac{\omega_1^2}{\omega^2 + \nu^2}.$$

Die Schichttiefe ist nun also eindeutig durch die Frequenz bestimmt. Weiter hängt nun auch die relative Schichtbreite S von der Frequenz ab, denn λS , die Breite in Kilometern, ist konstant, daher

$$(7,2) \quad S = \frac{S_1}{\omega_1} \cdot \omega.$$

Die Stoßzahl ν schließlich ist unabhängig von der Frequenz und deshalb

$$(7,3) \quad \left(\frac{\nu}{\omega} \right) = \frac{\nu}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_1}{\omega}.$$

So gibt es nun nur noch eine unabhängige Variable, die Frequenz, und unsre bisherigen Resultate (die von den drei Variablen S , M , ν/ω abhängen) können darauf umgerechnet werden (mit 7,1; 7,2; 7,3); das geschieht wieder graphisch. Die scheinbaren Höhen z werden nun ersetzt durch solche z_1 , die in Wellenlängen der Grenzfrequenz ausgedrückt sind $\left(z_1 = \frac{\omega_1}{\omega} z \right)$. Man kommt so zu Abb. 10. Hier ist, abhängig von der Frequenz, oben aufgetragen die scheinbare Höhe (gemessen in Wellenlängen der Grenzfrequenz und von der Schichtmitte aus) und unten der Logarithmus des Reflexionsverhältnisses; die gestrichelten Kurven geben das Entsprechende für den durchgehenden Anteil der Welle. Die Berechnungen sind durchgeführt für vier relative Schichtbreiten ($S_1 = 250, 50, 10, 2$) und für vier Stoßzahlen $\left(\frac{\nu}{\omega_1} = 0(a); 0,02(b); 0,1(c); 0,5(d) \right)$. Zum Verlauf der scheinbaren Höhen ist strichpunktiert angegeben der Schichtverlauf, und zwar der Abstand von der Schichtmitte, wo für die betreffende Frequenz die DK. verschwindet (das wäre die scheinbare Höhe, wenn

man, ohne Verzögerung, nach der Strahlentheorie rechnete). In § 5 wurde schon erwähnt, daß die nach den hier benutzten Methoden berechneten Verzögerungen nicht in allen Fällen physikalisch sinnvoll sind; das kann jetzt näher erläutert werden: Abb. 11 zeigt nach Sommerfelds Arbeit¹³⁾ das Frequenzspektrum eines abgehackten

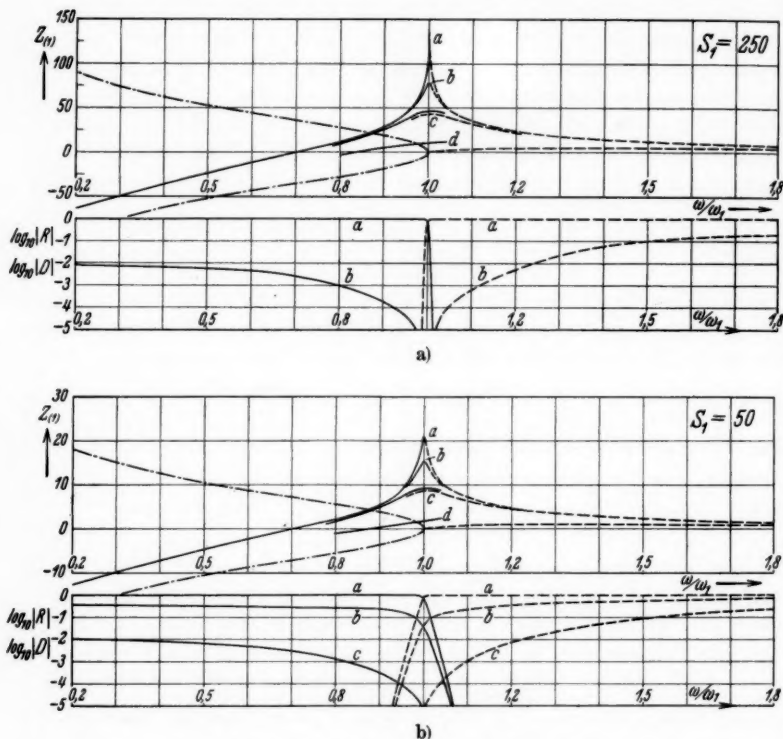


Abb. 10. „Durchdrehaufnahmen“ (oben scheinbare Höhe, unten reflektierte bzw. durchgehende Amplitude, abhängig von der Frequenz; verschiedene Stoßzahlen $\frac{\nu}{\omega_1} = 0$ (a); 0,02 (b); 0,1 (c); 0,5 (d); Schichtbreiten $250 \lambda_1$, bzw. $50 \lambda_1$;

Reflexion ausgezogen, Durchgang gestrichelt)

Wellenzuges der Frequenz ω_0 . Das Wichtigste ist, daß die Amplitude (auch wenn man von der „Kannelierung“ absieht) beiderseits von ω_0 absinkt. Läßt man nun dieses Spektrum von Wellen (ein Signal also) auf eine Schicht auffallen, deren Grenzfrequenz ω_1 höher ist als ω_0 , so wird in der durchgehenden Welle das Frequenzgebiet um ω_0 kaum

zu finden sein, weil (bei nicht zu dünner Schicht) unterhalb der Grenzfrequenz die Amplitude sehr rasch, und zwar exponentiell absinkt. Dieses Absinken wird den Intensitätsanstieg zwischen ω_1' und ω_0 in Abb. 11 oben aufheben und das durchgehende Spektrum so verzerren, daß im wesentlichen nur das rechte Seitenband von ω_1'

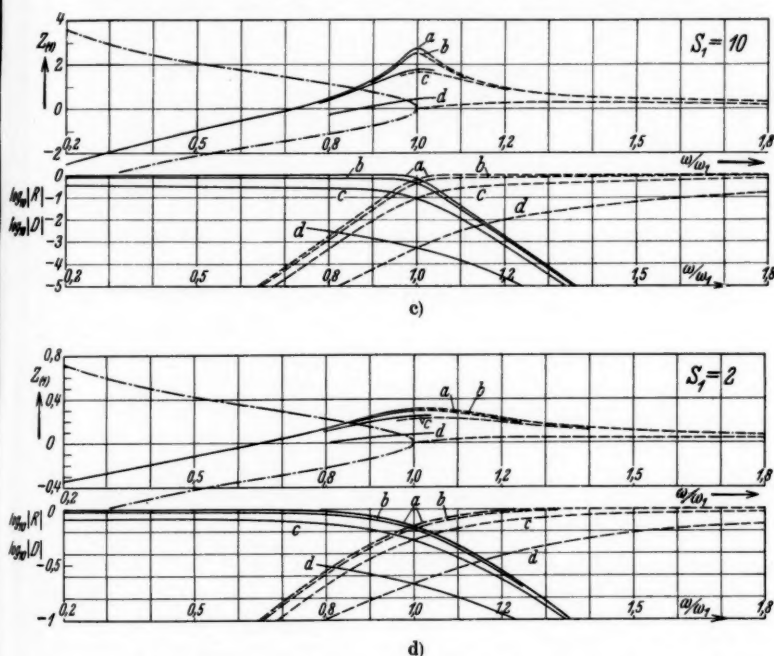


Abb. 10. „Durchdrehaufnahmen“ (oben scheinbare Höhe, unten reflektierte bzw. durchgehende Amplitude, abhängig von der Frequenz; verschiedene Stoßzahlen $\frac{\nu}{\omega_1} = 0$ (a); 0,02 (b); 0,1 (c); 0,5 (d); Schichtbreiten $10 \lambda_1$, bzw. $2 \lambda_1$

Reflexion ausgezogen, Durchgang gestrichelt)

ab darin zu finden ist. Was durchgeht, ist also ein stark verzerrtes Signal mit einer höheren Frequenz; für diese höhere Frequenz aber ergibt unsere Rechnung eine positive Verzögerung, wie man sie aus physikalischen Gründen fordern muß. Ganz ähnlich läßt sich der Fall der Reflexion behandeln bei einer Grenzfrequenz ω_1'' unterhalb ω_0 . Hier wird im wesentlichen das linke Seitenband (niederer Frequenz) reflektiert. Insgesamt kommt man zu dem Resultat, daß unsere Laufzeitberechnung nicht mehr zulässig ist für den Durch-

gang, wenn ω_0 wesentlich kleiner ist als ω_1' , und für Reflexion im umgekehrten Fall. Diese Bereiche sind deshalb in Abb. 10 weggelassen. Abb. 10 gibt nun eigentlich das, was zur Beobachtung gelangt in den sogenannten „Durchdrehaufnahmen“, wo man die Reflexion beobachtet bei kontinuierlich veränderter Frequenz. Der untere Teil gibt jeweils die Amplitude, und wenn diese auf einen bestimmten Wert gesunken ist, wird die Apparatur nicht mehr

registrieren. Dieser Wert hängt natürlich von der Senderleistung und von der Güte des Empfängers ab; aus den bei den Versuchen etwa üblichen Daten erhält man eine untere Grenze der Empfindlichkeit von etwa 1%iger Reflexion. Die mit Dämpfung gerechneten Kurven in Abb. 10 zeigen, daß bei dicken Schichten die Absorption einen sehr starken Abfall der reflektierten Amplitude verursacht; die Bedingungen für partielle Reflexion sind daher am günstigsten bei möglichst kleiner Absorption. Ohne Absorption entnimmt man aus Abb. 10 etwa die folgenden Werte für den Bereich partieller Reflexion auf der Frequenzskala (mit der oben angegebenen Empfindlichkeitsgrenze von 1%):

Bei einer Schichtdicke $\lambda \cdot S$ von

$$\begin{aligned} 10 \lambda_1 (L = 2,81 \lambda_1) &: \pm 15\%, \\ 50 \lambda_1 (L = 14,0 \lambda_1) &: \pm 3\%, \\ 250 \lambda_1 (L = 70,1 \lambda_1) &: \pm 0,6\% \end{aligned}$$

der Grenzfrequenz.

Durch eine Näherungsrechnung aus der Reflexionsformel (5,4) kann man auch direkt ableiten, daß der Frequenzbereich partieller Reflexion umgekehrt proportional S_1 ist, weshalb man für Schichten, die breiter als etwa 5 Wellenlängen ($L > 1,4 \lambda_1$) sind, sagen kann:

$$(7,4) \text{ Frequenzbereich partieller Reflexion} = \pm \frac{150}{S_1} \% = \pm \frac{42,1 \lambda_1}{L} \%,$$

sofern keine Absorption vorhanden ist (wobei S_1 die Schichtbreite in Wellenlängen λ_1 der Grenzfrequenz mißt).

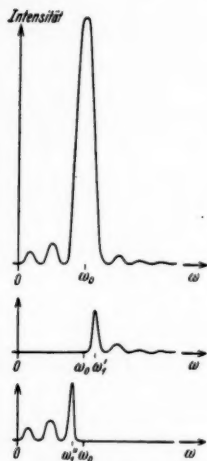


Abb. 11. Frequenzspektrum eines abgehackten Wellenzuges (nach Sommerfeld) der Frequenz ω_0 ; darunter das durch eine Schicht (Breite 10 Grenzwellenlängen) mit der Grenzfrequenz ω_1' durchgehende Seitenband; darunter das von einer (ebenso 10 Grenzwellenlängen breiten) Schicht mit der Grenzfrequenz ω_1'' reflektierte Seitenband

Zusammenfassung

Für eine ganze Reihe von Fällen, wo. der Brechungsindex stetig von einer Koordinate abhängt, gelingt es, die Wellengleichung exakt zu integrieren dadurch, daß man sie durch eine geeignete Transformation überführt in eine hypergeometrische Differentialgleichung. Eine Verknüpfungsrelation zwischen deren verschiedenen Lösungen führt dann direkt auf die Reflexionsverhältnisse, die man numerisch mittels Gammafunktionen erhält. Die Methode wird angewandt auf den Fall ebener Wellen, die senkrecht auf eine Ionosphärenschicht auftreffen (wobei der Einfluß des Erdmagnetfelds nicht berücksichtigt wird).

Für eine Ionosphärenschicht, in der die DK. kontinuierlich und beiderseits symmetrisch bis zu einem Minimum ϵ_{\min} absinkt (deren Verlauf gegeben ist durch $\epsilon = 1 - \text{const} \cdot \frac{e^{n\xi}}{(1 + e^{n\xi})^2}$, wo ξ die Höhe

über der Schichtmitte ist) wird die numerische Berechnung durchgeführt. Der Betrag der partiellen Reflexion, sowie die scheinbare Höhe werden berechnet. Die Resultate sind:

I. In den meisten Fällen ist die Strahlenbehandlung des Problems zulässig; d. h. entweder wird die Welle reflektiert (wenn ϵ_{\min} negativ ist) oder sie geht durch (wenn ϵ_{\min} positiv ist). Die Amplitude der reflektierten (bzw. durchgehenden) Welle sinkt exponentiell ab mit der Stoßzahl der Ladungsträger und mit dem Verhältnis von Schichtbreite zu Vakuumwellenlänge. Die (von der Schichtmitte aus gemessene) scheinbare Höhe wächst proportional mit diesem Verhältnis. Sie läßt sich errechnen aus der örtlichen Gruppengeschwindigkeit.

II. Diese Beziehungen gelten nicht mehr, wenn merkliche partielle Reflexion eintritt (als solche wird eine von mehr als 1% der einfallenden Amplitude angesehen), nämlich: 1. bei Schichten mit einer Halbwertsbreite L unter 1,4 Wellenlängen λ , 2. bei dickeren Schichten in einem Frequenzbereich um die Grenzfrequenz von etwa $\pm 42,1 \lambda/L$ %. Falls keine Dämpfung vorhanden ist, ist dann bei der Grenzfrequenz das Reflexions- wie das Durchgangsverhältnis 0,707, und es hat die scheinbare Höhe bei der Grenzfrequenz ein endliches Maximum der Größe $\frac{L}{1,53} \cdot \left(\log_{10} \frac{L}{\lambda} + 1,10 \right)$.

III. Mit Dämpfung sinkt außer der Amplitude auch die scheinbare Höhe in der Nähe der Grenzfrequenz. Durch Dämpfung kann der Fall eintreten, daß man die Reflexion bei der wahren Grenzfrequenz eventuell nicht mehr beobachtet, weil schon bei einer niedrigeren Frequenz die Amplitude unter die Beobachtungsgrenze gesunken ist.

Diese Arbeit wurde im Rahmen eines Forschungsauftrags der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt (DVL) ausgeführt. Geheimrat Prof. Zenneck, meinem verehrten Lehrer, verdanke ich die Fragestellung; er brachte der Arbeit stets reges, förderndes Interesse entgegen. Geheimrat Prof. Sommerfeld gab wertvolle Literaturhinweise. Diskussionen mit Dr. habil. Goubau fanden häufig statt und haben die Arbeit sehr gefördert. Regierungsrat Prof. Böhmer (Dresden) und Dipl.-Ing. Meißner haben mich bei der Berechnung der Gammafunktion liebenswürdig unterstützt. Die beiden Vorstände des Mathematischen Instituts der Hochschule, Geheimrat Prof. Faber und Prof. Baldus ermöglichten mir die Benutzung der automatischen Rechenmaschine dieses Instituts. Allen Genannten spreche ich auch an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aus.

Literaturverzeichnis

- 1) H. E. Paul, Hochfrequenztechn. u. Elektroak. **50**. S. 121. (1937).
- 2) R. Gans, Ann. d. Phys. **47**. S. 709. (1915).
- 3) J. Wallot, Ann. d. Phys. **60**. S. 734. (1919).
- 4) K. Försterling, Ann. d. Phys. [5] **11**. S. 1. (1931).
- 5) G. J. Elias, Elektr. Nachr. Techn. **8**. S. 4 (1931).
- 6) D. R. Hartree, Proc. Cambridge Phil. Soc. **25**. S. 97. (1929).
- 7) D. R. Hartree, Proc. Roy. Soc. London A **131**. S. 428. (1931).
- 8) P. S. Epstein, Proc. Nat. Acad. Amer. **16**. S. 627. (1930). Unter Hinweis auf Epstein gibt einen Spezialfall: C. Eckart, Phys. Rev. **35**. S. 1303. (1930).
- 9) F. Gauss-Werke Bd. 3, S. 125 bzw. 207, Göttingen 1876.
- 10) Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der math. Physik, 6. Aufl. Bd. 2, Braunschweig 1919.
- 11) L. Schlesinger, Handb. d. Theorie d. linearen Differentialgleichungen, Bd. 1, S. 483. Leipzig 1895.
- 12) K. Försterling, Lehrbuch d. Optik, Leipzig 1928.
- 13) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **44**. S. 177. (1914).
- 14) H. Lassen, Jahrb. d. drahtl. Telegr. **28**. S. 139. (1926).
- 15) I. Ginzel, Acta Math. **56**. S. 273. (1931); O. Roettäschel, Diss. Dresden 1922.
- 16) G. Goubau, Hochfrequenztechn. u. Elektroak. **44**. S. 17. (1934).

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 24. März 1939)

**Das Verhalten
von amorphem und kristallisiertem Quarz
im elektrostatischen Feld¹⁾**

Von Olga Gayling von Altheim

(Mit 15 Abbildungen)

I. Einleitung

Die zahlreichen Untersuchungen über das Verhalten fester Isolatoren unter dem Einfluß von Gleichspannungen haben bisher noch zu keiner einheitlichen Klärung der Vorgänge im Inneren eines festen Dielektrikums geführt. Man beobachtete:

1. Aufladeströme, die sich aus dem mit der Zeit veränderlichen Polarisationsstrom und dem eigentlichen Leitungs- oder Reststrom zusammensetzen.

2. Nachlade- oder Rückströme nach Aufhebung des äußeren Feldes.

Letztere Erscheinung bezeichnet man als dielektrische Nachwirkung, deren Ursache die Ausbildung einer Gegenspannung im Dielektrikum von dem Zeitpunkt an ist, in dem der Isolator dem äußeren Felde unterworfen wird. Nach Aufhebung des äußeren Feldes verursacht die in diesem Augenblicke vorhandene Gegenspannung einen dem Aufladestrom entgegengesetzten Rückstrom, der zeitlich abnehmend bis zur Entpolarisierung fließt. Für viele Isolatoren ist der Abfall mit der Zeit gleich beim Lade- und beim Rückstrom; das bedeutet aber, daß die Geschwindigkeit, mit welcher sich die jeweilige Gegenspannung ausbildet, gleich der Geschwindigkeit ist, mit der sie zurückgeht. Die Größe dieser Geschwindigkeit ist als „Polarisierbarkeit“ für die verschiedenen Dielektrika charakteristisch. Den prinzipiellen Zusammenhang zwischen Auflade- und Rückstrom hat zuerst J. Curie²⁾ erkannt und für isolierende Kristalle durch sein Superpositionsgesetz ausgedrückt. Es besagt, daß die auftretenden Ströme der wirkenden Gesamtspannung proportional sind, wobei sich äußere und innere Spannungen in ihrer Wirkung auf den Isolator additiv verhalten.

1) D 16 (gekürzt).

2) J. Curie, Ann. d. Chim. et d. Phys. Ser. 6. 18. S. 203. 1889.

Für die Auswertung der Beobachtung von elektrischen Vorgängen an Kristallen sind die schon auf anderen Wegen gewonnenen Erkenntnisse über den inneren Bau derselben vorteilhaft. Der Gedanke lag deshalb nahe, im besonderen den Quarz zu untersuchen, über den bereits bekannt ist, daß er sehr gut isoliert, stark polarisierbar ist, und daß diese elektrischen Eigenschaften von der Temperatur wesentlich beeinflußt werden. Es erschien ferner interessant, zum Vergleich auch amorphen Quarz unter denselben Gesichtspunkten wie kristallisierten zu untersuchen. Im folgenden wird ein Überblick gegeben über die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen anderer Autoren an Quarz unter dem Einfluß von Gleichspannungen.

1. Kristallquarz

a) Leitung und Polarisation \perp zur optischen Achse

Die ältesten Untersuchungen wurden von J. Curie¹⁾, F. Tegetmaier und E. Warburg²⁾ mitgeteilt. Letztere konnten an Quarzplatten von 15 mm Durchmesser und 5 mm Dicke mit einem Galvanometer, das noch $6,65 \cdot 10^{-10}$ Amp. zu messen gestattete, von 19 bis 1600 Volt und bei Temperaturen bis 300° keinerlei Ströme nachweisen. J. Curie gelang es dann, elektrometrisch Leitung und Polarisation in einem Temperaturgebiet von 20 – 160° zu messen. Da die Ströme mit der Zeit abfielen, definierte er willkürlich als Leitung 1, die nach einer Minute dem Elektrometer in der Sekunde zugeführte Ladungsmenge. Er erhielt als spez. Leitfähigkeit nach 1 Min. $3 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^{-1} \text{ Ohm}^{-1}$ bei 20° und $2,3 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^{-1} \text{ Ohm}^{-1}$ bei 160° . Später führte Thornton³⁾ Messungen mit einer Methode aus, die darin bestand, ellipsoidische Quarzplatten an dünnen Quarzfäden aufgehängt in einem elektrischen Felde in Schwingungen um die Feldrichtung zu versetzen und die Dämpfung zu messen, wodurch er die Polarisationserscheinungen verfolgen konnte. Er fand eine sehr langsame Polarisation, die nach 48 Std. noch nicht beendet war. Der spez. Widerstand wurde zu $2 \cdot 10^{16} \text{ Ohm} \cdot \text{cm}$ für 17° angegeben, worunter der Widerstand gegen die Ladungsverrückungen bei der Polarisation zu verstehen ist, so daß bei vollständiger Polarisierung dieser Widerstand unendlich groß würde. Thornton wies darauf hin, daß damit nichts über die Größe des Ohmschen Widerstandes ausgesagt werden kann.

1) J. Curie, C. R. **130**, 1886; Ann. d. Chim. et d. Phys. Ser. 6 **18**. S. 203. 1889.

2) F. Tegetmaier u. E. Warburg, Wied. Ann. **32**. S. 442. 1887.

3) M. W. Thornton, Phil. Mag. Ser. 6. **19**. S. 390. 1910.

b) Leitung und Polarisation || zur optischen Achse

Tegetmaier und Warburg sowie J. Curie berichten auch über Messungen der Leitung || zur optischen Achse. Erstere haben bei 225° den Verlauf eines Ladestromes mit 19 Volt über 16 Std. und den des zugehörigen Rückstromes über 10 Std. verfolgt und eine starke Abnahme der Ströme mit der Zeit festgestellt. Sie fanden ferner, daß der Quarz durch die Entladung wieder in seinen Anfangszustand zurückgeführt wurde, wenn die Spannung 19 Volt betragen hatte, daß dies jedoch nicht der Fall war, nachdem der erhitzte Quarz 3 Std. lang mit 1500 Volt polarisiert worden war und sich darauf 8 Std. lang entladen hatte. Darnach war bei 225° mit 19 Volt kein Ladestrom mehr meßbar. Zur Erklärung dieser Veränderung wurde die Möglichkeit einer elektrolytischen Leitung angenommen, welche dann durch spätere Versuche¹⁾ durch Natriumionenwanderung bei 224° von einer Natriumamalgamanode aus nachgewiesen werden konnte.

Curie untersuchte die Leitung an verschiedenen Quarzscheiben und fand von 20—300° unterschiedliche Werte sowohl für die Größe als für das Absinken mit der Zeit. Die Leitung nach 1 Min. bei 20° war etwa 260mal so groß als diejenige \perp zur optischen Achse, und zwar $8,5 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^{-1} \text{ Ohm}^{-1}$ bei 20°, dagegen $1,8 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^{-1} \text{ Ohm}^{-1}$ bei 300°.

Exner²⁾ führte seinen Versuch mit einer Natriumamalgamanode bei im Bereich von 109—148° schwankender Temperatur aus. Als spez. Leitfähigkeit wurde für 148° $4,15 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^{-1} \text{ Ohm}^{-1}$ und für 109° $1,9 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^{-1} \text{ Ohm}^{-1}$ angegeben, ohne daß aber der Zeitpunkt bekannt ist, für den diese Zahlen gelten sollen, so daß ein Vergleich mit anderen Beobachtern nicht möglich ist.

Joffé³⁾ ermittelte zwischen 18 und 22° einen Temperaturkoeffizienten der Leitung von etwa 15% pro Grad und gibt einen Einfluß vorausgegangener Erwärmung an, derart, daß die Leitung bei Raumtemperatur 1½ Std. nach einer 4stündigen Erwärmung auf 65° noch etwa doppelt und 1 Std. nach 15stündiger Erwärmung auf 40° noch etwa 1,5mal so groß wie vor der Erwärmung war.

Bei Thornton⁴⁾ bildete sich die Polarisation bei Raumtemperatur bedeutend schneller aus als \perp zur Hauptachse und schritt aber nach 120 Std. noch meßbar fort.

1) E. Warburg u. F. Tegetmaier, Wied. Ann. **35**. S. 455. 1888.

2) F. M. Exner, Verh. d. D. Phys. G. **3**. S. 26. 1901.

3) A. Joffé, Ann. d. Phys. **20**. S. 919. 1906.

4) W. M. Thornton, a. a. O.

Weiterhin untersuchte V. E. Whitman¹⁾ den Verlauf von Lade- und Rückströmen bei Raumtemperatur und beobachtete im Gegensatz zu den anderen Autoren, daß der Ladestrom nach etwa 10 Min. konstante Werte für die nächste Stunde erreichte; ferner daß sich der Widerstand mit der Spannung änderte, und zwar für 800 Volt nur 60% des Widerstandes für 200 Volt betrug.

Schließlich haben noch Darmois und Radmanèche²⁾ die Leitfähigkeit von 700° bis zur Abkühlung auf Raumtemperatur verfolgt und gefunden, daß der Logarithmus der Stromstärke bis etwa 250° eine lineare Funktion der reziproken absoluten Temperatur sei. Eine Messung dauerte jeweils 10 Sek., so daß hier keine Ergebnisse über die Geschwindigkeit der Polarisierung erhalten wurden.

2. Amorpher Quarz

Exner³⁾ berichtet über Versuche an einer Scheibe mit 240 Volt in einem Bereich von 100—150°. Die Leitfähigkeit war mit einer Natriumalmagamanode größer als mit einer Quecksilberanode. Der Strom floß bei schwankender Temperatur während der Messungen etwa 4 Std. lang durch den Quarz, so daß keine Schlüsse auf den jeweiligen Grad der Polarisierung möglich sind.

Den Polarisationsverlauf hat Thornton⁴⁾ bei Raumtemperatur wie für Kristallquarz untersucht und eine Geschwindigkeit der Polarisierung gefunden, welche größer war als beim Kristallquarz \perp zur Hauptachse und kleiner als \parallel dazu.

Weitere Versuche bei 20° hat auch Whitman⁵⁾ ausgeführt, der einen sehr starken Abfall der Leitfähigkeit mit der Zeit feststellt, so daß der Strom nach 1 Min. auf weniger als $\frac{1}{10}$ seines Wertes nach 1 Sek. abgesunken war. Nach 24stündigem Stromdurchgang war der Widerstand größer als 10^{20} Ohm · cm. Der Rückstrom zeigte annähernd gleichen Verlauf wie der Ladestrom. Ein Einfluß verschiedener Elektroden (chemisch niedergeschlagenes Silber und Platin als Mischung von PtCl_4 in Lavendelöl aufgestrichen) wurde nicht festgestellt.

Durch die Beobachtungen von Gnann⁶⁾, der eine Abhängigkeit der Leitung von der Luftfeuchtigkeit, welche durch Schwefelsäure-Wassergemische variiert wurde, um Zehnerpotenzen feststellte, wurde

1) V. E. Whitman, Journ. Opt. Soc. Amer. 12. S. 31. 1926.

2) E. Darmois u. R. Radmanèche, Journ. de phys. et le Radium 7. S. 168.—178. 1936.

3) F. M. Exner, a. a. O.

4) W. M. Thornton, a. a. O.

5) V. E. Whitman, a. a. O.

6) Walter Gnann, Ztschr. f. Phys. 66. S. 436. 1930.

auf die Wichtigkeit einer guten Trocknung hingewiesen, wenn man Oberflächenströme ausschließen will.

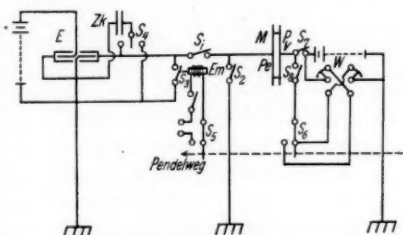
Auf Grund des bisher Bekannten sind Vergleiche zwischen den verschiedenen, elektrischen Verhalten von amorphem Quarz einerseits und Kristallquarz, in den beiden ausgezeichneten Richtungen, andererseits nur im Hinblick auf die Dielektrizitätskonstanten und auf einen größenordnungsmäßig angebbaren Mittelwert des elektrischen Widerstandes möglich. Trotz der angeführten recht zahlreichen Untersuchungen an Quarz ist es bisher noch nicht unternommen worden, die Polarisationserscheinungen und die Restleitung sowohl für verschiedene Spannungen als auch für verschiedene Temperaturen unter einheitlichen Gesichtspunkten an den verschiedenen Quarzmodifikationen zu verfolgen. Vorliegende Arbeit behandelt die Ergebnisse derartiger systematischer Messungen.

II. Meßanordnung

Der zu untersuchende Quarz wurde jeweils in Form einer Kreisplatte von 2 mm Dicke und 30 mm Durchmesser benutzt. Sie bildete das Dielektrikum eines Plattenkondensators, dessen Elektroden durch je eine auf die Quarzplatte kathodisch aufgestäubte Platinschicht von 25 mm Durchmesser gebildet waren. Dieser Kondensator wurde durch Metallträger gehalten, die ihrerseits durch kleine Quarzblättchen isoliert waren. Das Ganze befand sich in einem geerdeten, metallischen Schutz, eingebaut in eine evakuierbare Glasröhre, die mittels einer elektrischen Heizung auf höhere Temperatur gebracht werden konnte. Die eine Elektrode war mit einer Spannungsquelle verbunden und trug gleichzeitig die Lötstelle eines Thermoelementes aus Silber-Konstantan zur Temperaturmessung. Die andere Elektrode war mit einem Binantenelektrometer verbunden.

Die Aufgabe der Messung bestand darin, zunächst die Aufladung der einen Elektrode bei Anlegen einer bestimmten Spannung an der Gegenelektrode und hierauf den nach Abschalten der Spannung einsetzenden Rückstrom in ihrer Abhängigkeit von der Zeit bei verschiedenen Temperaturen weitgehend systematisch zu verfolgen.

Die Durchführung dieser Aufgabe und die Notwendigkeit, hierbei auch sehr kleine Zeiten zu benutzen, erforderte eine Versuchsanordnung, die



durch Abb. 1 schematisch veranschaulicht ist. Die wesentlichen Teile sind 9 Schalter, von denen Nr. 5 und 6 durch ein Fallpendel betätigt werden.

Die Wirkungsweise der Schalter war folgende:

- S_1 : Unterbrechung der Verbindung zwischen Elektrometer E und Meßkondensator M .
- S_2 : Erdung des Meßkondensators.
- S_3 : Erdung des Elektrometers, betätigt durch einen kleinen Elektromagneten Em .
- S_4 : Zuschaltung von Kapazitäten zum Elektrometer während der Messung. Abschaltung mit gleichzeitiger Erdung der Zusatzkapazitäten Zk .
- S_5 : Schließen des Stromes für die Spule von S_3 .
- S_6 : Umpolung der Spannung am Meßkondensator.
- S_7 : Direkte Verbindung des Meßkondensators mit der Spannungsquelle, während S_8 zu einer Umpolung mittels Wippe W eingestellt werden konnte.
- S_8 : Unterbrechung der Verbindung zwischen Meßkondensator und S_6 während der Umpolung.
- S_9 : Wie S_8 , aber zur Handbetätigung.

Vorbereitung einer Messung

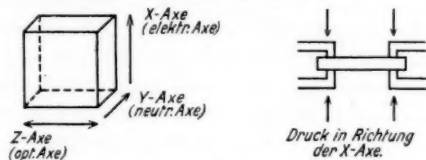
Nachdem die jeweils zu untersuchende Quarzplatte eingebaut und der Meßkondensator in die Glasröhre eingepaßt worden war, wurde die Röhre ausgepumpt und bei beiderseitiger Erdung des Quarzes mehrere Stunden auf $100-250^\circ \text{C}$ geheizt. Die Ausheizung war einerseits zur vollständigen Entfernung etwaiger Aufladungen des Quarzes, andererseits zur Trocknung erforderlich. Mit den Messungen wurde immer erst begonnen, wenn mit dem Elektrometer keinerlei Restladungen im Quarz mehr nachweisbar waren. Diese Vorsichtsmaßregel war durchaus erforderlich, da es sich zeigte, daß solche Ladungen in manchen Fällen mit außerordentlicher Hartnäckigkeit sich im Quarz erhielten. Es machte sich dies besonders bei Verwendung frisch bestäubter Platten stark bemerkbar. Während \perp zur optischen Achse geschnittener und amorpher Quarz durch eine mehrstündige Ausheizung auf $100-150^\circ$ ladungsfrei zu erhalten waren, war bei \parallel zu Achse geschnittenem Quarz eine mehrtägige Ausheizung auf über 250° erforderlich. Wenn danach keine Elektrometergänge mehr zu beobachten waren, so wurde das als Zeichen dafür angesehen, daß nicht nur keine Ladungen mehr im Quarz enthalten waren, sondern daß auch keine Kontaktpotentiale auftraten, und daß ferner keine Störungen der Messung durch piezoelektrische Wirkungen beim Kristallquarz zu erwarten waren.

Diese letztere Wirkung hätte im allgemeinen bei dem Schnitt der Quarzplatte \parallel zur optischen Achse durch Druck der Halterung auf den Quarz auftreten können. Abb. 2 zeigt die beiden Grenzfälle der möglichen Lagen der Piezoachsen in diesem Falle. Alle

Zwischenlagen, die noch hätten vorhanden sein können, werden durch Drehen um die optische Achse erhalten. Im Fall I würde die volle Piezowirkung auftreten, im Falle II dagegen wäre sie bei unseren Messungen einflußlos.

Da eine Piezowirkung überhaupt nicht zu beobachten war, muß gefolgert werden, daß die benutzte Platte entweder \perp zur neutralen

I. bestäubte Fläche \perp zur elektrischen X-Axe.



II. bestäubte Fläche \perp zur neutralen Y-Axe.

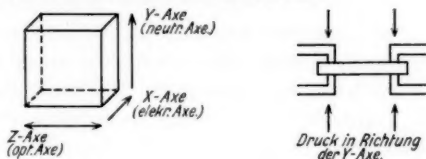


Abb. 2

Achse geschnitten war oder daß kein hierfür ausreichender Druck der Halterung bei den verwendeten Temperaturen auftrat.

Das Elektrometer wurde auf Spannungs- und Mengenempfindlichkeit geeicht, und letztere konnte durch Zuschaltung geeigneter Kapazitäten nach Bedarf meßbar verändert werden.

III. Kristallquarz \parallel zur optischen Achse geschnitten

Die optische Achse des Kristalles steht in diesem Falle \perp zur Richtung der elektrischen Kraftlinien des Kondensators.

Nachdem die systematische Untersuchung festgestellt hatte, daß alle betrachteten Erscheinungen der angelegten Elektroden-spannung proportional verlaufen und in ihrem Ausmaß vom Vorzeichen unabhängig sind, können wir uns im folgenden auf die quantitative Betrachtung derjenigen Erfahrung beschränken, die mit einer Elektroden-spannung von 200 Volt gewonnen worden ist.

1. Messung von Aufladeströmen und Rückströmen bei verschiedenen, konstanten Temperaturen

a) Aufladungsbeobachtungen

Das Anlegen der Spannung an den Meßkondensator geschah mit dem Pendelschalter S_6 bei bereits enterdetem Elektrometer.

Nach 30 Sek. Aufladezeit wurde die Kondensatorplatte *Pe* vom Elektrometer getrennt und geerdet. Der erste Ausschlag des Elektrometers bestand also aus der Summe der Ladungen, die durch den Influenzierungsstoß und den Ladestrom innerhalb der ersten 30 Sek.

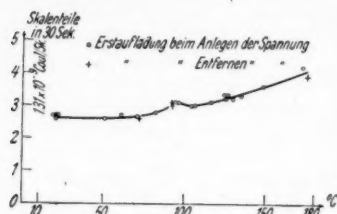


Abb. 3. Quarz ||

geliefert wurden. Diese Ladungsmenge war etwa 400 mal größer als die der folgenden Aufladungen durch den Ladestrom allein, so daß für die Messung des ersten Wertes ein Zusatzkondensator von 0,05 Mikrofarad || zum Elektrometer geschaltet werden mußte. Diese ersten Werte zeigen nur einen geringen Anstieg mit der Temperatur, wie aus ihrer Zusammenstellung in Abb. 3 ersichtlich. Da eine Änderung der Dielektrizitätskonstanten im betrachteten Temperaturgebiet bei Versuchen mit Wechselspannungen von 1 Hz und $6 \cdot 10^4$ Hz von uns nicht gefunden werden konnte, ist anzunehmen, daß die

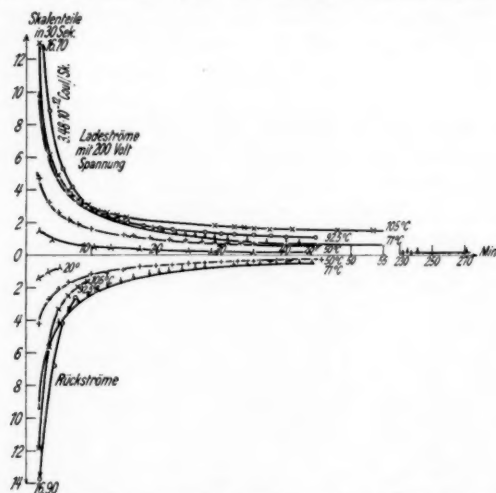


Abb. 4. Quarz ||; Lade- und Rückströme bei verschiedenen Temperaturen

Zunahme des ersten Ausschlages lediglich auf den mit der Temperatur wachsenden Anteil des Ladestromes zurückzuführen ist.

Die weitere Verfolgung der Aufladeströme begann jeweils 1 Min. danach und wurde über Zeiten bis zu vielen Stunden fortgesetzt derart, daß jeweils die Aufladungen während 30" gemessen und

dann geeignete Erdpausen eingeschaltet wurden. Wir betrachten im folgenden nur diese vom ersten Aufladungsstoß befreiten Ströme. Ihr zeitlicher Verlauf ist in der oberen Hälfte der Abb. 4 für 5 verschiedene Temperaturen verzeichnet.

Für den Verlauf ist in allen Fällen ein anfänglich rascher und später immer langsamer werdender Abfall der Stromstärke charakteristisch, und es hat den Anschein, daß bei genügend langer Zeit eine asymptotische Annäherung an den Nullpunkt erfolgt, die um so schneller erfolgt, je geringer die Temperatur ist. Während die zu bestimmter Zeit herausgegriffenen Ladeströme im allgemeinen, wie auch nach vorhandener Kenntnis zu erwarten, bei höherer Temperatur größere Werte besitzen, ist das davon abweichende Verhalten bei $92,5^{\circ}$, das bei allen Versuchen wiederkehrte, auffallend.

b) Entladungsbeobachtungen

Nachdem die Aufladeströme eine bestimmte Zeit verfolgt worden waren, wurde mittels der Pendelschalter die Spannung fortgenommen und die Kondensatorplatte *Pv* sogleich mit Erde verbunden. Es setzt jetzt sofort ein Rückstrom mit entgegengesetztem Vorzeichen ein, der in analoger Weise wie die Ladeströme zeitlich verfolgt wurde.

Der erste Meßwert enthielt wie bei der Aufladung den Influenzierungsstoß und den Mittelwert des Rückstromes in den ersten 30 Sek.; er ist in Abb. 3 durch \times miteingetragen und zeigt dieselben Absolutwerte und denselben Gang wie bei der Aufladung. Den weiteren Verlauf der Rückströme stellt die untere Hälfte der Abb. 4 dar.

c) Vergleich zwischen Ladeströmen und Rückströmen

Die Beziehung zwischen den Lade- und Rückströmen entspricht dem von Curie allgemein für Dielektrika angegebenen Superpositionsgesetz. Es besagt, daß der Rückstrom in jedem Zeitpunkt nach Beginn der Entladung, vergrößert um den Wert des zugehörigen Ladestromes im Augenblick der Umpolung, gleich dem Ladestrom im gleichen Zeitpunkt nach Beginn der Aufladung ist. Curie selbst prüfte die Gültigkeit des Gesetzes insbesondere bei Versuchen mit \perp zur optischen Achse geschnittenen Quarzscheiben.

Als Beispiel für die Genauigkeit, mit welcher das Gesetz von uns auch für \parallel zur optischen Achse geschnittenen Quarz geltend gefunden wurde, sind in Tab. 1 einige Meßwerte der Kurven für 105° und 55 Min. Ladungsdauer und für 71° und 275 Min. Ladungsdauer angegeben.

Bei strenger Gültigkeit des Gesetzes müssen die Werte für den Ladestrom gleich den Werten für die Summe aus Endwert und

Tabelle 1

Gültigkeit des Curie'schen Superpositionsgesetzes für
zur optischen Achse geschnittene Quarzscheibe

Temperatur 105° C

Nach Minuten	2	5	8	9,5	55
Ladestrom in Skt./30 Sek.	13,0	4,9	3,4	3,1	1,5 = Endwert
Rückstrom in Skt./30 Sek.	11,8	3,3	1,9	1,9	1,6
Rückstrom + Endwert	13,3	4,8	3,4	3,1	

Temperatur 71° C

Nach Minuten	2	3,5	10	30	40	275
Ladestrom in Skt./30 Sek.	9,60	5,75	2,65	0,90	0,70	0,15 = Endwert
Rückstrom in Skt./30 Sek.	9,45	5,60	2,50	0,75	0,55	
Rückstrom + Endwert	9,60	5,75	2,65	0,90	0,70	

Rückstrom sein, was in der ersten Zusammenstellung mit $\pm 2\%$ Fehler, in der zweiten genau zutrifft.

Aus dem Superpositionsgesetz läßt sich auch die Tatsache erklären, daß die Auflade- und Rückströme in Abb. 4 für niedrige Temperaturen nahezu spiegelbildlich erscheinen, denn der Endwert des Aufladestromes ist hier schon nach kurzer Ladungsdauer sehr klein, so daß Rückstrom und Ladestrom nur um diesen kleinen Betrag voneinander abweichen. Das Zutreffen des genannten Gesetzes bedeutet indessen noch nicht, daß im Ladestrom nicht noch teilweise ein reiner Leitungsstrom enthalten ist. Dies soll im folgenden Abschnitt entschieden werden.

2. Messung von Aufladeströmen bei konstanten Temperaturen und von Rückströmen bei steigenden Temperaturen (Rückströme „ausgeheizt“)

Es sollte durch die Ausheizung beim Rückstrom die Frage geklärt werden, ob die Aufladeströme bei den verschiedenen Temperaturen bestimmten Endwerten, die als Dauerleitfähigkeit zu deuten gewesen wären, zustrebten oder ob die Aufladeströme Ausdruck reiner Polarisationserscheinungen seien. Dazu wurden die Gesamtladungsmengen verglichen, welche die Rück- und Ladeströme während der Ent- und Aufladezeit lieferten; diese müssen gleich sein, wenn keine Leitung auftrat. Um diesen Vergleich durchzuführen, muß der Rückstrom bis zur völligen Entladung des Dielektrikums verfolger sein. Das ist in kürzeren Zeiträumen nur durch Temperatursteigerung während der Entladung erreichbar.

Mit wachsender Temperatur vergrößerte sich der Rückstrom, erreichte ein Maximum und fiel dann gegen Null ab, obwohl die

Temperatur weiter anstieg. Aus der Zahl der Versuchsreihen seien 2 herausgegriffen:

a) Abb. 5 zeigt zwei Ladevorgänge (+ und o) bei 19 und 20,5°. Die zugehörigen Temperaturen sind mit gleichen Zeichen

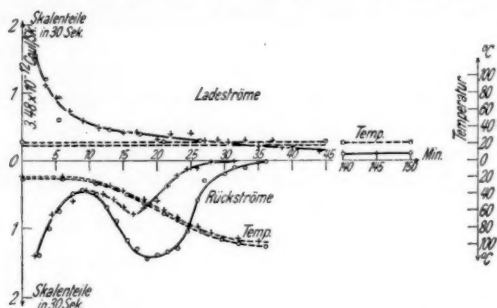


Abb. 5. Quarz ||; verschiedene Ladungsdauer, ausgeheizte Rückströme

und gestrichelten Kurven eingetragen. Es wurde nur die Ladungsdauer verändert; sie war im einen Falle 45 (+), im anderen 150 Min. (o). Bei der Aufladung sind in gleichen Zeiten beide Vorgänge gleich, weshalb nur eine Kurve ausgezogen wurde. Man beobachtet, daß beim Ausheizen das Maximum des Rückstromes für die längere Aufladung höher und die vom Rückstrom überdeckte Fläche größer als für die kurze Aufladung ist, ferner, daß das größere Maximum bei 54° und das kleinere bei 42° liegt.

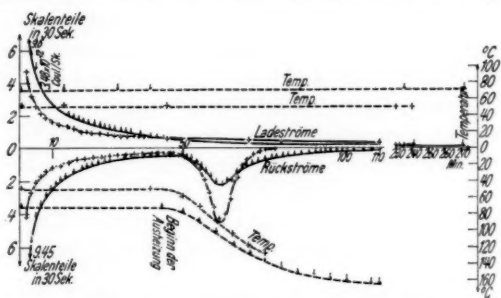


Abb. 6. Quarz ||; verschieden starker Temperaturanstieg bei Ausheizung der Rückströme

b) In den in Abb. 6 dargestellten Messungen sind die Aufladezeiten nahezu gleich und die Temperaturen verschieden. Die Aufladungen dauerten bei 71° 275 Min. (o-Kurve) und bei 51° 240 Min. (+-Kurve). Obwohl die Fläche der Aufladung bei 51° kleiner ist

als diejenige für 71° , ist doch das Maximum der zu 51° gehörigen Rückstromkurve höher. Das ist eine Folge der rascheren Temperatursteigerung, wie sie aus der zugehörigen Temperaturkurve zu ersehen ist. Diese Abhängigkeit der Höhe des Maximums von der Geschwindigkeit, mit der die Heiztemperatur anstieg, wurde auch bei weiteren derartigen Versuchen gefunden.

Vergleicht man die Temperaturen, bei denen die Maxima der Rückströme in den besprochenen und weiteren Versuchen auftraten, mit den Temperaturen der zugehörigen Aufladungen, so scheint, wie aus folgender Tab. 2 ersichtlich, die Temperatur des Maximums des Rückstromes stets um etwa gleichen Betrag über der Aufladetemperatur zu liegen.

Tabelle 2

Temperatur der Aufladung in $^{\circ}\text{C}$	19	21	51	61	71	105
Dauer der Aufladung in Min.	45	150	240	45	275	55
Beginn der Ausheizung nach Min.	6	6	45	10	45	10
Temperatur des Maximums in $^{\circ}\text{C}$	42	54	93	104	110	146
Temp. d. Maximums — Temp. der Aufladung	23	33	42	43	39	41

Für die beiden Aufladungen bei Raumtemperatur ist die Differenz kleiner als für die übrigen Temperaturen, sie nimmt aber mit der Dauer der Aufladung, d. h. mit wachsender Ladungsmenge zu. Dies könnte ein Zeichen dafür sein, daß in diesen beiden Fällen die Ladungsmenge zu gering war, so daß der Rückstrom bereits vor dem Zeitpunkt, in welchem die eigentliche Maximumtemperatur von $40\text{--}42^{\circ}$ über Zimmertemperatur erreicht wurde, zu klein geworden war. Demnach wird unabhängig von der Temperatursteigerung und der Dauer der Ausheizung und unabhängig von der Dauer der Aufladung ein Maximum des Rückstromes *spätestens* 42° über der Temperatur der Aufladung erreicht.

Aus obigen Versuchen konnte weiterhin durch *Ausmessen der Flächen* gefunden werden, daß nahezu die gesamte Ladungsmenge mit umgekehrtem Vorzeichen durch den Rückstrom wieder vom Quarz abgegeben wurde. Folgende Tab. 3 gibt die Ergebnisse dieser Ausmessung für 3 Versuche, darunter die der beiden Kurven in Abb. 6.

Tabelle 3

Temperatur der Aufladung in $^{\circ}\text{C}$	Aufladedauer in Min.	Menge der Aufladung in Coulomb	Menge der Entladung in Coulomb	Verlust in $\%$
51	240	$5,46 \cdot 10^{-10}$	$5,37 \cdot 10^{-10}$	1,6
71	275	$5,67 \cdot 10^{-10}$	$5,46 \cdot 10^{-10}$	3,7
105	55	$6,23 \cdot 10^{-10}$	$6,06 \cdot 10^{-10}$	2,7

Aus der Tab. 3 ist zu ersehen, daß die Aufladeströme als Ausdruck der im Quarz sich bildenden Polarisierung aufzufassen sind, welche sich nach Aufheben des äußeren Feldes wieder vollständig zurückbildet. Die Verluste von wenigen Prozenten könnten auf eine vielleicht doch vorhandene kleine Dauerleitfähigkeit schließen lassen. Sie sind jedoch auch dadurch zu erklären, daß die Rückströme nur so lange beobachtet wurden, bis sie sehr kleine Werte von 0,2 bis 0,05 Skt./30 Sek. erreicht hatten und nicht bis zu ihrem vollständigen Erlöschen.

3. Messung von Aufladeströmen bei fallender Temperatur
und von Rückströmen bei steigender Temperatur
(„Einfrieren“ der Ladeströme und „Ausheizen“ der Rückströme)

Die folgenden Versuche sollten zeigen, ob eine Aufladung für längere Zeit im Quarz zu speichern wäre. Die Aufladungen wurden bei einer konstanten Temperatur über Zimmertemperatur begonnen, und nach einer gewissen Zeit wurde der Apparat während der Aufladung abgekühlt. Der Ladestrom sank mit fallender Temperatur und wurde schon vor Erreichung der Raumtemperatur unmeßbar klein.

a) Versuche, in denen der Beginn des Rückstromes bei Raumtemperatur erfolgte

Abb. 7 zeigt die völlig übereinstimmenden Ergebnisse (○, +) zweier Versuche, bei denen die Aufladung unter ganz gleichen Bedingungen vorgenommen wurde. Die Aufladungen begannen bei

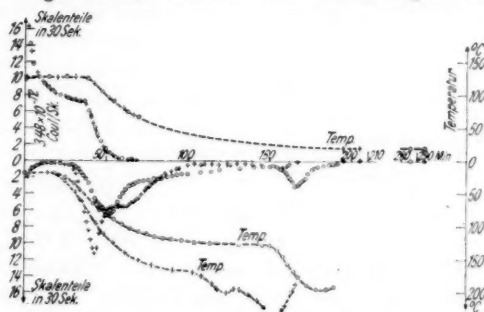


Abb. 7. Quarz II; 2 gleiche Ladeströme; Rückströme verschieden ausgeheizt

127°, nach 35 Min. wurde mit der Abkühlung angefangen, und nach etwa 3 Std. war die Zimmertemperatur erreicht. Die Rückströme wurden nach 20 Min. Entladungsdauer ausgeheizt unter verschiedener Temperatursteigerung.

In Analogie mit den Ergebnissen des vorigen Abschnittes wurde, bei gleicher zugeführter Ladungsmenge, ein größeres Maximum

vom Rückstrom erreicht, wenn die Ausheizung schnell erfolgte als bei langsamer Temperatursteigerung. Es war jedoch auffällig, daß bei raschem Ausheizen (+-Kurve) der Rückstrom nach Erreichung des Maximums nicht steil gegen Null abfiel, sondern über 10 Min. lang fast konstant bei einem Werte blieb, der etwa der Hälfte der Maximumhöhe entsprach. Diese unerwartete Erscheinung deutet auf ein weiteres besonderes Verhalten des Quarzes hin, denn es zeigte sich, daß die Kurve auf $\frac{1}{10}$ Skt. genau auch mit umgekehrtem Vorzeichen der Ladespannung reproduzierbar war.

Auch die Rückstromkurve für langsame Ausheizung (O-Kurve) sank nach dem Maximum nicht steil gegen Null. Um die zur Beobachtung des gesamten Reststromes nötige Zeit abzukürzen, wurde eine zusätzliche Temperatursteigerung angewandt; hierbei erreichte der Rückstrom noch ein zweites kleineres Maximum.

Bei weiteren Versuchen wurde nun die Temperatur der Aufladungen variiert, die Steigerung der Ausheiztemperatur des Rückstromes aber gleich gehalten. Dabei ergab sich, daß der Rückstrom stets bei nahezu gleicher Temperatur sein erstes Maximum erreichte, und daß auch die Höhe dieses Maximums gleich blieb.

In Abb. 8 sind 2 Kurven dargestellt; die Dauer der Aufladung war für beide Messungen gleich, die Temperatur bis zum Beginn

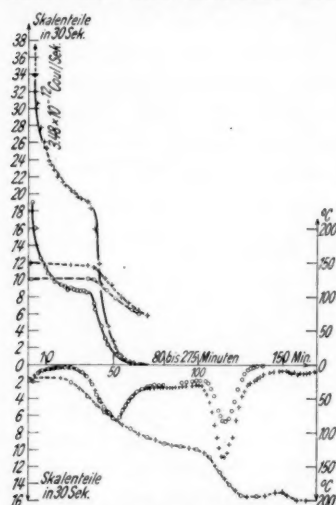


Abb. 8. Quarz II; Ladeströme mit Abkühlung, Rückströme ausgeheizt

der Abkühlung nach 35 Min. war im einen Falle 148° (+-Kurve), im anderen 126° (O-Kurve), was zu erheblich verschiedenen Ladeströmen führte. Trotz der sehr verschiedenen Aufladungsmengen fallen die ersten Maxima beider Rückströme völlig zusammen, und erst nach der zusätzlichen Temperatursteigerung bilden die Rückströme 2 verschieden hohe zweite Maxima, entsprechend den verschiedenen noch vorhandenen Ladungsmengen, jedoch auch bei gleicher Temperatur.

Daraus ergab sich erstens, daß die Höhe des ersten Maximums bei gleichartiger Ausheizung des Rückstromes unabhängig von der Temperatur der Aufladung und der dieser entsprechenden Ladungs-

menge ist; zweitens, daß die Höhe des zweiten Maximums von der Ladungsmenge abhängt. Weitere Versuche ergaben, daß das erste Maximum auch unabhängig davon ist, wann bei der Aufladung mit der Abkühlung begonnen wurde; es tritt ferner in gleicher Größe und bei gleicher Temperatur auf, wenn während der Aufladung nach der Abkühlung nochmals stark geheizt wurde, so daß der Ladestrom nach dem Absinken wieder anstieg, um bei erneuter Abkühlung zum zweiten Male abzufallen. Schließlich ergab sich die Höhe des ersten Maximums ebenso wie die Ladeströme proportional der benutzten Ladespannung.

b) Versuche, in denen der Beginn des Rückstromes bei verschiedenen Temperaturen erfolgte

Außer von der Spannung wurde eine Abhängigkeit des ersten Maximums nur noch von der Temperatur gefunden, bei der mit der

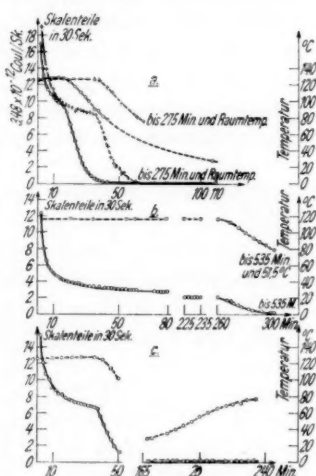


Abb. 9a. Quarz ||;
Ladeströme mit Abkühlung

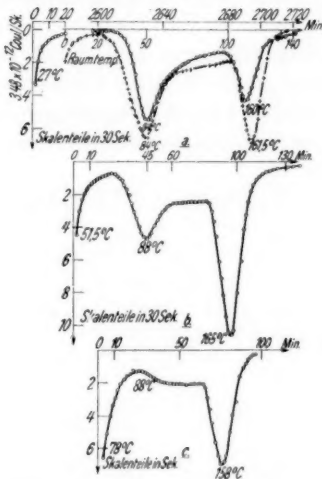


Abb. 9b. Rückströme ausgeheizt

Entladung begonnen wurde. Mit steigender Temperatur wächst der erste Teil des Rückstromes, und die entsprechende Ladungsmenge fehlt in der vom ersten Maximum überdeckten Fläche.

Es wird dies deutlich in den Kurven der Abb. 9, bei denen von oben nach unten die Temperatur des Rückstrombeginnes wächst. Die zugehörigen Ladeströme haben die entsprechenden gleichen Zeichen. Die beiden Kurven *a* stellen einmal den Rückstrom dar, der bei Raumtemperatur begonnen wurde (+-Kurve) mit dem

ersten Maximum in voller Größe, zum anderen ein in seiner Höhe verkleinertes erstes Maximum eines Rückstromes, der bei 27° begann (O-Kurve). Letztere Messung wurde nach 20 Min. für 43 Std. unterbrochen; in dieser Zeit kühlte sich der Quarz auf Raumtemperatur ab und war beidseitig geerdet. Trotzdem konnten durch die Ausheizung wieder beide Maxima bei den zugehörigen Temperaturen erhalten werden. Dies zeigt, daß eine Entladung des Quarzes bei Raumtemperatur so langsam verläuft, daß die Wirkung von 43 Std. noch nicht bemerkbar ist.

In Kurve *b* der Abb. 9 ist ein Rückstrom aufgezeichnet, der bei $51,5^{\circ}$ begann; hier ist das erste Maximum schon merklich verkleinert, obwohl die Gesamtladungsmenge groß war, wie aus der Höhe des zweiten Maximums und aus der zugehörigen Ladestromkurve zu ersehen ist.

Schließlich begann in Messung *c* der Rückstrom bei 78° , also knapp unter der Temperatur des ersten Maximums; hierbei ist ein erstes Maximum nicht mehr ausgebildet, sondern es tritt erst bei höherer Temperatur ein Maximum auf.

Bei allen Versuchen lag das erste Maximum in einem Temperaturbereich von $82-88^{\circ}$, das zweite in einem solchen von 158 bis 165° .

Betrachtet man bei den in Abb. 9 dargestellten Kurven den Beginn der Rückströme, so stellt man folgendes fest: Beginnt der Rückstrom bei Raumtemperatur, so ist die vom rasch abfallenden Teil des Rückstromes in der ersten Zeit gelieferte Entladungsmenge klein, und das erste Maximum hat seinen größten Wert. Wird die Temperatur für den Beginn des Rückstromes gesteigert, so wird die zuerst freiwerdende Ladungsmenge größer und das erste Maximum wird kleiner. Diese Beobachtung zeigt, daß die Ladungsmenge, die im ersten Maximum auftritt, von dem Teil des Rückstromes abhängt, der in der ersten Zeit der Entladung fließt. Da nun bei gleicher Temperatur für Aufladung und Entladung die Lade- und Rückströme nach dem Superpositionsgesetz bis auf den Betrag des Ladestromes im Augenblick der Umpolung gleich sind, so ist für diesen Fall kein erstes Maximum zu erwarten.

Das bei der früheren Ausheizung dieser Rückströme (Abschn. 2) auftretende Maximum würde demnach nur dem zweiten Maximum der zuletzt betrachteten Rückstromkurven entsprechen. Die Regel, daß dieses Maximum spätestens etwa 42° über der Aufladetemperatur erreicht wird, gilt auch angenähert für diese zweiten Maxima, wenn als Aufladetemperatur diejenige vor Beginn der Abkühlung angesehen wird. Dies scheint berechtigt, weil die Ladeströme mit

der Abkühlung sehr rasch abfallen und für die Aufladung als Ganzes nur einen unwesentlichen Beitrag liefern.

Folgende Tab. 4 enthält den Zusammenhang zwischen der Temperatur und Dauer der Aufladung und der Temperatur des zweiten Maximums.

Tabelle 4

Temperatur der Aufladung in °C	128	127	126	117	147
Dauer der Aufladung bis zur Abkühlung in Min.	15	35	35	260	35
Temperatur des zweiten Maximums	160	167	168	165	168
Temperaturdifferenz	32	40	42	48 ½	21

Die Ergebnisse aus diesen Versuchen wurden nicht zur Entscheidung der Frage herangezogen, ob die Auf- und Entladungsmengen gleich sind, weil die Ausmessung der Flächen erst von den nach 2 Min. gemessenen Stromwerten ab vorgenommen werden konnten. In diesen ersten Minuten war aber die Aufladung bei hohen Temperaturen sehr viel größer als im gleichen Zeitraum die Entladung bei tieferen Temperaturen. Es hätte deshalb der nach 30 Sek. mit Zusatzkapazität erhaltene erste Meßwert herangezogen werden müssen, was durch den mit $\pm 4\%$ Fehler behafteten Umrechnungsfaktor die Auswertung verschlechtert hätte.

Zusammenfassung der Ergebnisse an der zur optischen Achse geschnittenen Quarzplatte

1. Die unter dem Einfluß von Gleichspannungen auftretenden Ströme waren reine Polarisationsströme. Es wurden \perp zur optischen Achse praktisch keine Leitung gefunden. Die Größenordnung der beobachteten Polarisationsströme betrug zwischen 19 und 175° für 200 Volt $1,9 \cdot 10^{-14}$ bis $1,7 \cdot 10^{-12}$ Amp./cm² bei 2 mm Quarzdicke.

2. Die Polarisationsströme bei der Auf- und Entladung nahmen mit der Zeit ab und waren von 10—400 Volt spannungsproportional.

Die Polarisationsströme wuchsen mit der Temperatur; der relative Abfall der Ströme nahm mit wachsender Temperatur ab.

Es können im Quarz \perp zur optischen Achse drei verschiedene Phasen der Polarisation unter dem Einfluß von Gleichspannung unterschieden werden:

a) Sofortige Polarisation, unabhängig von der Temperatur innerhalb der Meßgenauigkeit.

b) Zeitlich schnell ablaufende Polarisation in den ersten 10 bis 20 Min., die von der Temperatur nur wenig abhängt.

1) Man beachte die sehr lange Dauer der Aufladung bei diesem Versuch, wodurch die vom Rückstrom zu liefernde Ladungsmenge extrem groß wurde.

c) Langsam fortschreitende Polarisation, wahrscheinlich bis zu einer in unseren Versuchen nicht erreichten Sättigung, deren Höhe mit der Temperatur stark steigt.

4. Die Ströme der Polarisation und Entpolarisation haben bei gleicher Temperatur gleichen Verlauf und sind durch das Curiesche Superpositionsgesetz miteinander verbunden. Bei Temperaturen für die Entpolarisierung, die von denen der zugehörigen Aufladung verschieden sind, hat die durch langsame Polarisation geschaffene Aufladung (c) keinen Einfluß auf die Entladung der übrigen Elektrizitätsmengen (a und b).

Kristallquarz \perp zur optischen Achse geschnitten

Die Orientierung im Meßkondensator war so, daß die Richtung des elektrischen Feldes \parallel zur Richtung der optischen Achse verlief.

Vorhandene Aufladungen war hier durch Ausheizung bis 150° verhältnismäßig leicht zu beseitigen.

1. Messung von Lade- und Rückströmen bei Zimmertemperatur

Die ersten Meßwerte für die Aufladungen (also die influenzierten Ladungsmengen und die des Stromes in den ersten 30 Sek.) sind

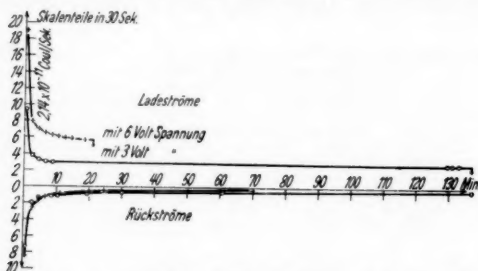


Abb. 10. Quarz \perp ; Lade- und Rückströme bei Zimmertemperatur

wie früher der Spannung proportional. Die Absolutwerte bei gleicher Spannung sind 1,7mal größer als im Falle des zuvor betrachteten Quarzes. Es erklärt sich dies dadurch, daß zum Influenzierungsstoß hier in den ersten 30 Sek. ein erheblich größerer Ladestrom hinzukommt. Es zeigt sich allgemein, daß die Ladeströme \parallel zur optischen Achse unter gleichen Bedingungen etwa 400mal stärker waren als die \perp zur Achse fließenden.

Die Ladeströme sinken mit der Zeit anfänglich rasch und dann nur noch sehr langsam ab, wie beispielsweise aus 2 Kurven der Abb. 10 zu ersehen ist. Wegen der bereits erwähnten erheblichen Größe der Ströme sind zu diesen Messungen nur geringe

Spannungen benutzt worden. Es muß hier bemerkt werden, daß im Gegensatz zu früher diese Ladeströme nicht streng spannungsproportional waren, sondern mit der Spannung stärker zunahmen, daß aber der hier in Betracht kommende allgemeine Charakter der Kurven der gleiche blieb.

Auch die Rückströme fallen nach Erdung des Kondensators anfangs rasch ab und laufen danach mit relativ kleinen Beträgen sehr lange Zeit weiter. Das Superpositionsgesetz ist im allgemeinen befriedigend erfüllt, wenn auch nach größeren Zeiten hin wachsende Abweichungen zu beobachten waren in dem Sinne, daß die Rückströme langsamer abfielen, als dem Gesetz entspräche.

2. Messung von Ladeströmen bei Zimmertemperatur
und von Rückströmen bei steigender Temperatur
(„Ausheizung“ der Rückströme)

Da die Rückströme bei Raumtemperatur, wie erwähnt, sehr bald kleine Werte erreichten, ohne dann in langer Zeit unmeßbar klein zu werden, wurde während ihrer Messung die Temperatur gesteigert, wodurch die Rückströme vergrößert, und die Beobachtungszeit verkürzt werden konnte.

Bei einem Vorversuche mit geerdetem Meßkondensator traten bei Temperaturen über 200° negative Ladungen auf, welche nicht durch eine vorausgegangene Aufladung mit positiver Spannung zu erklären waren. Da die Beobachtungen zeigten, daß die Ladungen mit der Zeit abnahmen, wurde die Temperatur von 300° während 9 Std. beibehalten. Hierauf erwies sich der Quarz für alle Temperaturen bis 300° unelektrisch. Die während dieser Ausheizung beobachteten Ladungen entsprachen etwa $-2 \cdot 10^{-6}$ Coulomb. Diese erhebliche Erhitzung hatte zur Folge, daß eine Veränderung im Verhalten des Quarzes sich einstellte derart, daß Lade- und Rückströme gegen früher bei allen folgenden Messungen geringer blieben. Da wir weiterhin keine Temperaturen über 300° benutzten, blieb aber der neu erhaltene Zustand während unserer Messungen erhalten.

In Abb. 11 werden 2 Versuchsreihen mitgeteilt, in denen die Aufladungsdauer das eine Mal 63, das andere Mal 1100 Min. betrug. Man erkennt hier im

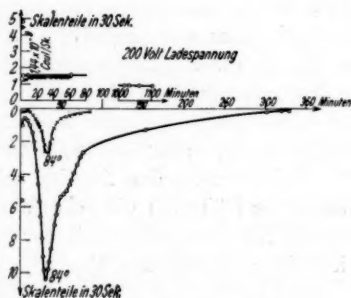


Abb. 11. Quarz 1;
Aufladungen bei Zimmertemperatur,
Rückströme ausgeheizt

wesentlichen nur die sehr rasch sich einstellenden nahe horizontalen Kurvenstücke, die aber immerhin, wie die Verfolgung nach langen Zeiten hin zeigt, noch nach kleineren Werten zustreben. Der in der einen Kurve bemerkbare, unerwartete anfängliche Anstieg ist die Folge geringer Temperaturkonstanz und weist auf außerordentliche Temperaturempfindlichkeit der Ladeströme hin (vgl. Abschnitt 3).

Die Rückströme ergaben ein scharfes Maximum bei 84° Ausheiztemperatur, wenn in beiden Fällen der gewählte Temperaturanstieg der gleiche war.

Durch Auszählen der Flächen wurden die Ladungsmengen der Lade- und Rückströme für diese und 2 weitere Versuche bestimmt. Folgende Tab. 5 gibt einen Überblick über die dabei erhaltenen Werte.

Tabelle 5

Dauer der Aufladung in Min.	11	22	63	1104
Aufladungsmenge in Coulomb	$4,55 \cdot 10^{-8}$	$1,01 \cdot 10^{-7}$	$2,51 \cdot 10^{-7}$	etwa $2,70 \cdot 10^{-6}$
Entladungsmenge in Coulomb	$3,75 \cdot 10^{-8}$	$8,40 \cdot 10^{-8}$	$1,92 \cdot 10^{-7}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$
Differenz in Coulomb . . .	$8,00 \cdot 10^{-9}$	$1,70 \cdot 10^{-8}$	$5,90 \cdot 10^{-8}$	etwa $9,0 \cdot 10^{-7}$
Leistungsstrom in Amp. . .	$1,21 \cdot 10^{-11}$	$1,28 \cdot 10^{-11}$	$1,56 \cdot 10^{-11}$	etwa $1,36 \cdot 10^{-11}$

Es bleibt hier eine Differenz zwischen Aufladungsmenge und Entladungsmenge, die auf durchschnittliche *Leitung* während der Ladungsdauer umgerechnet wurde, unter der Annahme, daß es sich hier um einen zeitunabhängigen, wahren Leistungsstrom handelt. Da der durchschnittliche Wert der Gesamtladeströme in der ersten Stunde der Aufladung $7,2 \cdot 10^{-11}$ Amp. betrug, entfielen vom Ladestrom 81% auf Polarisationsvorgänge und 19% auf Restleitung. Der Ladestrom war nach $18\frac{1}{2}$ Std. auf $4,1 \cdot 10^{-11}$ Amp. abgesunken, so daß sich seine Zusammensetzung in diesem Zeitpunkt zu 67% als Polarisationsstrom und 33% als Restleitung ergibt. Dies zeigt, daß die Polarisation sehr langsam fortschreitet und für 200 Volt bei Raumtemperatur erst nach Tagen beendet sein dürfte.

Änderte man den Anstieg der Ausheiztemperatur, so variierte sowohl die Höhe als die Schärfe und Lage des Rückstrommaximums und ein Zusammenhang mit der Temperatur während der Aufladung wie beim geschnittenen Quarz fand sich nicht.

1) Der Aufladestrom konnte in der Zeit von 60—1065 Min. nach Beginn der Aufladung nicht gemessen werden, weshalb die Zwischenwerte nur aus der Kurve extrapoliert wurden.

3. Messung von Ladeströmen bei verschiedenen konstanten Temperaturen und von Rückströmen bei steigender Temperatur

Es zeigte sich, wie auch schon auf allen bisherigen Darstellungen von Ladeströmen ersichtlich, daß die Ströme sehr steil mit der Temperatur anstiegen. Diese Abhängigkeit der Ladeströme von der Temperatur ist in Abb. 12 dargestellt. Es wurden Ladestromwerte für 200 Volt nach 2 Min. Ladungsdauer eingetragen. Die

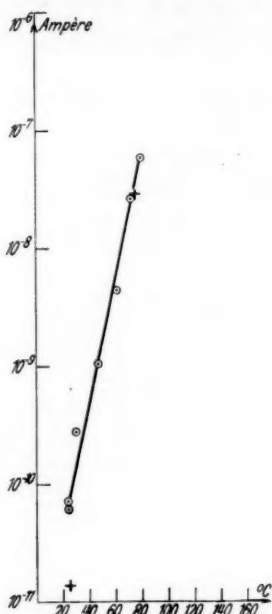


Abb. 12. Quarz \perp ; Temperaturabhängigkeit der Ladeströme

Werte bis 80° steigen so schnell an, daß für höhere Temperaturen Ströme bis 10^{-6} Amp. auch mit einem Galvanometer von Zeiss¹⁾ meßbar wurden; jedoch sind diese galvanometrischen Messungen nicht näher verfolgt worden. In logarithmischer Darstellung fallen die Stromwerte bis 80° auf eine Gerade.

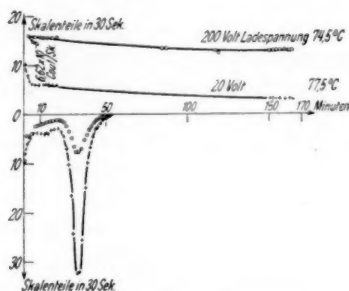


Abb. 13. Quarz \perp ; Ladeströme bei konstanter Temperatur, Rückströme ausgeheizt

Die hier, wie bereits bemerkt, nicht vorhandene Spannungsproportionalität der Vorgänge wird aus Abb. 13 deutlich. Es sind hier zwei Messungen dargestellt mit 20 und 200 Volt unter sonst nahezu gleichen Bedingungen, nämlich 165 Min. Ladungsdauer und $77,5^\circ$ für 20 Volt, $74,5^\circ$ für 200 Volt. Die Kurven für 20 Volt (+) sind mit 10fachem Ordinatenmaßstab gezeichnet, um die Abweichung von der Spannungsproportionalität zu veranschaulichen. Besonders

1) R. Mechau, Phys. Ztschr. S. 242. 1923.

für die ersten 10 Min. Ladungsdauer sinkt der Strom mit 20 Volt sehr viel stärker ab als derjenige mit 200 Volt, bei dem der Abfall erst über längere Zeit zu bemerken ist.

Die Rückströme wurden nach 19 Min. Entladungsdauer unter gleichem Temperaturanstieg ausgeheizt. Beide Maxima fallen zeitlich zusammen, traten also bei gleicher Temperatur auf, unabhängig von den verschiedenen Ladungsmengen in Analogie zu dem in Abschn. 2 Gesagten. Der Rückstrom für 20 Volt (10facher Ordinatenmaßstab) erreicht ein Maximum, dessen Höhe etwa die Hälfte des Maximums für 200 Volt beträgt. Über die auftretenden Ladungsmengen gibt folgende Tab. 6 Aufschluß.

Tabelle 6

Spannung in Volt	20	200
Aufladungsmenge in Coulomb .	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$3,06 \cdot 10^{-4}$
Entladungsmenge in Coulomb .	$5,25 \cdot 10^{-6}$	$1,82 \cdot 10^{-5}$
Differenz in Coulomb	$4,75 \cdot 10^{-6}$	$2,88 \cdot 10^{-4}$
Leitungsstrom in Amp.	$4,8 \cdot 10^{-10}$	$2,9 \cdot 10^{-8}$

Vom Gesamtlastestrom mit 200 Volt erscheint nur etwa $\frac{1}{17}$ als Rückstrom, während mit 20 Volt über die Hälfte des Ladestromes als Rückstrom zu finden ist. Wenn man wieder die Differenz zwischen Aufladung und Entladung auf Leitung¹⁾ zurückführt, so ergibt sich, daß dieselbe hervorgerufen durch 200 Volt 60mal größer ist als durch 20 Volt, während andererseits die Menge der Entladung, als Ausdruck der Polarisation, für 200 Volt nur 3,5mal größer ist als für 20 Volt. Dieses Verhalten läßt auf einen Sättigungswert der Polarisation schließen, welcher mit 200 Volt bereits erreichbar zu sein scheint.

Daß ein solcher Sättigungswert für Aufladungen mit 200 Volt tatsächlich angestrebt wird, zeigen Versuche von verschiedener Ladungsdauer bei verschiedenen Temperaturen, deren Ergebnisse in Tab. 7 zusammengestellt sind. Bei keiner dieser und weiteren Messungen mit 200 Volt wurde eine größere aufgespeicherte Ladungsmenge als rund $3 \cdot 10^{-5}$ Coulomb gefunden. Mit steigender Temperatur für die Aufladung wird der Grenzwert schneller erreicht.

Es sei noch erwähnt, daß die untersuchte Quarzscheibe zwischen 2 Meßperioden 3 Monate lang außerhalb der Röhre in Zimmerluft

1) Die für durchschnittliche Leitung berechneten Werte mit 200 Volt für Raumtemperatur und 75° aus Tab. 5 und 6 wurden in Abb. 12 als +-Zeichen mit eingetragen. Ihre Lage zeigt, wie stark der Anteil der Leitung am Ladestrom mit der Temperatur zunimmt.

Tabelle 7

Temperatur der Aufladung in °C . . .	80	101	105	110,5	118,5
Aufladungsdauer in Min.	165	450	255	120	173
Entladungsmenge in Coulomb	$1,65 \cdot 10^{-8}$	$1,99 \cdot 10^{-8}$	$2,4 \cdot 10^{-8}$	$2,9 \cdot 10^{-8}$	$2,9 \cdot 10^{-8}$

aufbewahrt wurde und danach mit vertauschten Seiten wieder eingebaut wurde, ohne daß sich dadurch irgendein Unterschied in den Meßergebnissen gegen früher zeigte.

Zusammenfassung der Ergebnisse an der \perp zur optischen Achse geschnittenen Quarzplatte

1. Die unter dem Einfluß von Gleichspannungen auftretenden Ströme setzten sich aus Polarisations- und Leitvorgängen zusammen. Die Größenordnung der Ströme betrug für 200 Volt zwischen 20 und 160° von $1,1 \cdot 10^{-11}$ bis $2 \cdot 10^{-7}$ Amp./cm².

2. Die Rückströme lieferten bei Raumtemperatur einen größeren Teil der Aufladung als bei höheren Temperaturen, bei denen unabhängig von der Aufladungsmenge ein Grenzwert der Entladung von rund $3 \cdot 10^{-8}$ Coulomb nicht überschritten wurde.

3. Die Lade- und Rückströme waren nicht spannungsproportional. Für kleine Spannungen waren die Ströme verhältnismäßig kleiner und sanken rascher mit der Zeit ab als für große Spannungen.

4. Der relative Abfall mit der Zeit nahm mit wachsender Temperatur zu.

Amorpher Quarz

1. Messungen von Lade- und Rückströmen bei konstanten Temperaturen

Die Verhältnisse sind hier wieder insofern sehr einfach, als strenge Spannungsproportionalität der Lade- und Rückströme bestand.

Im untersuchten Temperaturbereich von Raumtemperatur bis 250° war der relative Gang im Absinken von Lade- und Rückströmen mit der Zeit nahezu gleich. In den ersten 3 Min. sanken bei allen Temperaturen die Ströme mit der Zeit merklich ab, um darauf einen nahezu konstanten Wert über längere Zeit beizubehalten.

In Abb. 14 ist als Beispiel ein Ladestrom für 20 Volt bei 131° mit zugehörigem Rückstrom aufgetragen. Die Messung (Enterdung des Elektrometers) begann hierbei $\frac{1}{100}$ Sek. nach Anlegen der Spannung. Das gleiche gilt für den Beginn des Rückstromes, nachdem der Kondensator geerdet worden war. Der Rückstrom ist um

den Betrag des konstanten Dauerstromes kleiner als der Ladestrom; dies bedeutet, daß das Curiesche Superpositionsgesetz auch für

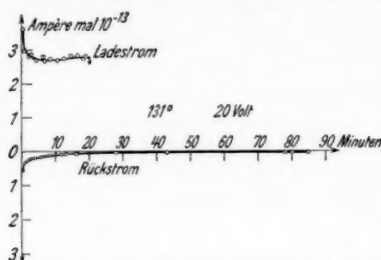


Abb. 14. Quarz amorph; Lade- und Rückstrom bei konstanter Temperatur

amorphen Quarz gültig ist, wie folgende Tab. 8 für eine Messung mit 200 Volt bei 120° zeigt.

Tabelle 8

Nach Minuten	1	2,5	3	5,5	8,5	18
Ladestrom in Skt./30 Sek.	12,0	11,8	11,6	11,5	11,35	10,8 = Endwert
Rückstrom in Skt./30 Sek.	1,2	0,95	0,80	0,70	0,50	
Rückstrom + Endwert . .	12,0	11,75	11,6	11,5	11,30	

Die Ladungsmengen, welche durch die Rückströme geliefert werden, sind bedeutend kleiner als diejenigen, die den gesamten Ladeströmen entsprechen. Diese Tatsache läßt schließen, daß beim amorphen Quarz der Hauptteil der Ladeströme durch eine Leitung verursacht wird und daß hauptsächlich der erste abfallende Teil der Ladestromkurven Ausdruck der Polarisation ist.

Für Zimmertemperatur unterteilte Whitman¹⁾ die Aufladekurven für amorphes Quarz in 1. Influenzierung, 2. rasch absinkenden Teil (Ausdruck der Polarisation), 3. konstanten oder sehr langsam absinkenden Dauerstrom und beobachtete, daß der Rückstrom nur aus den Teilen 1 und 2 bestand. Diese Beobachtung ließ sich auch für höhere Temperaturen bestätigen, mit der Einschränkung, daß auch das langsame Absinken des nur nahezu konstanten Dauerstromes noch als sehr geringe weitere Polarisation aufzufassen ist, da das Superpositionsgesetz gilt.

Die influenzierten Ladungen waren spannungsproportional und nach Abzug des Dauerstromes unabhängig von der Temperatur.

1) V. E. Whitman, a. a. O.

2. Temperaturabhängigkeit der Ladeströme

Aus den bisher besprochenen Beobachtungen ergibt sich, daß die Polarisation bei allen benutzten Temperaturen schon nach 3 Min. größtenteils beendet ist, und daß ein Temperatureinfluß sich hauptsächlich auf den Leitungsanteil der Ladeströme erstreckt.

Abb. 15 zeigt Ladestromwerte für 200 Volt nach 10 Min. Ladungsdauer in Abhängigkeit von der Temperatur. Der Logarithmus der Leitungsströme nimmt nahezu linear mit der Temperatur zu. Oberhalb 180° scheint der Anstieg etwas flacher zu werden. Bei Temperaturen unterhalb 64° waren die Ströme schon nach 8 Min. fast unmeßbar klein geworden, d. h. sie waren kleiner als $5 \cdot 10^{-15}$ Amp.

Zusammenfassung der Ergebnisse an amorphem Quarz

1. Die unter dem Einfluß von Gleichspannungen auftretenden Ströme setzten sich aus Polarisations- und Leitungsströmen zusammen. Die Größenordnung der Gesamtströme für 200 Volt betrug zwischen 20 und 250° von $2 \cdot 10^{-18}$ bis $2 \cdot 10^{-9}$ Amp./cm².

2. Die Rückströme waren mit den Ladeströmen durch das Superpositionsgesetz verbunden.

3. Lade- und Rückströme waren spannungsproportional.

4. Mit steigender Temperatur wuchs der Logarithmus der Ladeströme linear.

5. Die Dielektrizitätskonstante und der zeitliche Abfall der Ströme war von der Temperatur nahezu unabhängig.

Vergleich unserer Ergebnisse für die drei verschiedenen Quarzplatten untereinander und mit bisher Bekanntem

Wir haben uns bemüht, für die 3 verschiedenen Quarzproben die Leitung und die Polarisationserscheinungen, insbesondere durch

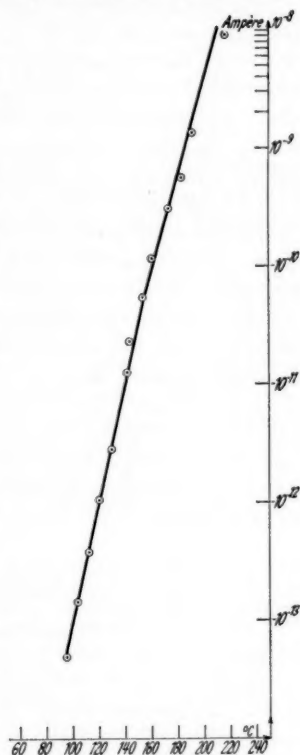


Abb. 15. Quarz amorph; Ladestromwerte nach 10 Min. in Abhängigkeit von der Temperatur

Beachtung der von den Rückströmen gelieferten Ladungsmengen, voneinander zu trennen. Deshalb wurde davon abgesehen, aus den Gesamtströmen einen spez. Widerstand zu errechnen, der mit der Zeit veränderlich ist.

1. Die eigentlichen Leitungsströme für 200 Volt, die aus den Ladeströmen nach Abzug der Polarisationsströme gefunden wurden, sind für Raumtemperatur ebenso wie der Temperatureinfluß in folgender Tab. 9 angegeben. Aus diesen Werten ergibt sich, daß der \parallel geschnittene Quarz für alle Temperaturen der beste Isolator ist, da bei ihm, vorausgesetzt, daß die zu isolierende Spannungsdifferenz lange genug bestanden hat, nach eingetretener vollständiger Polarisation keine Ströme mehr auftreten. Wegen der großen Temperaturempfindlichkeit der Leitung kann man den amorphen Quarz besonderes bei hohen Temperaturen nicht als guten Isolator benutzen. Diese Temperaturempfindlichkeit der Leitung verbunden mit der schnell beendeten Polarisation und der darauf einsetzenden Konstanz und strengen Spannungsproportionalität der Leitung läßt denselben jedoch geeignet zur Temperaturmessung erscheinen. Der \perp geschnittene Quarz dagegen kommt nicht als Isolator und zunächst auch nicht als Thermometer in Frage; letzteres deshalb nicht, weil der Zusammenhang zwischen der Erreichung des Sättigungswertes der Polarisation und der Temperatur noch nicht völlig geklärt werden konnte.

Tabelle 9

Leitungsströme in Amp.

	Stromstärke für 25° C	Zunahme $\Delta I/\Delta t$
Quarz \parallel	0 (nur Polarisationsströme) $1,35 \cdot 10^{-11}$	1 Größenordnung/16° (beobachtet von 25—75°)
Quarz \perp		
Quarz am.	10^{-17}	1 Größenordnung/20° (beobachtet von 20—250°)

2. Die Polarisationsströme sind wegen ihres Abfalles mit der Zeit direkt nicht miteinander vergleichbar, denn ihre zeitliche Abnahme ist für jede Quarzsorte und für jede Temperatur verschieden. Größenordnungsmäßig ergeben sich folgende Mittelwerte für die Polarisationsströme bei Raumtemperatur mit 200 Volt für die Zeit von 2—10 Min., die in Tab. 10 zusammengestellt sind und zum Vergleich mit den Leitungsströmen unter gleichen Bedingungen dienen sollen.

Das Verhältnis von Polarisationsstrom zu Leitungsstrom ist für den \parallel geschnittenen Quarz am größten, da hier praktisch nur

Tabelle 10

Vergleich der Mittelwerte von Polarisationsströmen für die Zeit von 2—10 Min.
bei Raumtemperatur mit Leitungsströmen

Quarz	Polarisationsstrom in Amp.	Leitungsstrom in Amp.	Verhältnis Pol. I/Ltg. I
	$1 \cdot 10^{-13}$	0	—
⊥	$6 \cdot 10^{-11}$	$1,35 \cdot 10^{-11}$	4,44
amorph	$2 \cdot 10^{-15}$	10^{-17}	$2 \cdot 10^2$

Polarisationsströme gefunden wurden; für den ⊥ geschnittenen Quarz haben beide Stromarten gleiche Größenordnung und für amorphen Quarz ist der Polarisationsstrom bei dieser Temperatur mehr als 200mal so groß als der Leitungsstrom.

a) Die zeitliche Abnahme der Polarisationsströme ist beim amorphen und beim ⊥ geschnittenen Quarz am größten in den ersten 2 Min. der Auf- bzw. Entladung, worauf sich dann ein langsamerer Abfall einstellt; für den || geschnittenen Quarz geschieht dies erst nach etwa 10 Min. Diese Beobachtungen sind in Übereinstimmung mit denen von Thornton¹⁾, der feststellte, daß Quarz in Richtung der optischen Achse schneller polarisiert wird als ⊥ dazu. Ferner hat Whitman²⁾ schon darauf hingewiesen, daß das Absinken der Ströme für amorphen und ⊥ geschnittenen Quarz ähnlich verläuft.

b) Der Temperatureinfluß auf die Polarisationsströme erstreckt sich sowohl auf deren absolute Größe als auf ihren zeitlichen Abfall. Für alle 3 Quarzarten wird die in einer bestimmten Zeit sich ausbildende Polarisation durch Temperatursteigerung vergrößert. Beim ⊥ geschnittenen Quarz schien ein Grenzwert angestrebt zu werden, während für die beiden anderen Quarzscheiben ein solcher nicht feststellbar war. Da in unseren Versuchen die größte ohne Sättigungserscheinungen im || geschnittenen Quarz gespeicherte Ladungsmenge nur etwa 10^{-8} Coulomb betrug, ist es nicht ausgeschlossen, daß auch hier $3 \cdot 10^{-5}$ Coulomb einen Grenzwert darstellen würden. Die Untersuchungen konnten sich wegen der geringeren Polarisierbarkeit dieses Quarzes nicht auf so große Ladungsmengen erstrecken³⁾.

1) W. M. Thornton, a. a. O.

2) V. E. Whitman, a. a. O.

3) Betrachtet man die Zahl der Moleküle, die beim Kristallquarz zwischen den bestäubten Flächen dem elektrischen Felde ausgesetzt waren, so ergeben sich aus der Dichte, dem absolutem Molekulargewicht und dem Volumen etwa

Der relative Abfall der Polarisationsströme nahm beim \parallel geschnittenen Quarz mit wachsender Temperatur ab, wie schon Curie fand, während er beim \perp zur Achse geschnittenen Quarz mit der Temperatur wuchs, und beim amorphen Quarz nahezu unabhängig von der Temperatur war. Letzteres ist günstig für die Anwendung des amorphen Quarzes als Thermometer, weil die Gesamtströme schon nach 3 Min. bei allen Temperaturen nahezu konstant sind und der weitere Abfall des Polarisationsanteiles im Verhältnis zum Leitungsstrom mit steigender Temperatur immer unmerklicher wird. Das in Tab. 10 angegebene Verhältnis von Polarisationsstrom zu Leitungsstrom nimmt demnach mit wachsender Temperatur ab.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. A. Becker, danke ich auch an dieser Stelle herzlich für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für fördernde Hilfe und reges Interesse. Weiterhin danke ich Frl. Dr. I. Schaper für ihre wertvollen Ratschläge bei der Durchführung der Arbeit.

2,7·10¹³. Drückt man ferner den Sättigungswert in Elementarladungen aus $= 2 \cdot 10^{15} e$ und bildet den Quotienten: $\frac{\text{Zahl der Moleküle}}{\text{Elementarladungen}} = 1,4 \cdot 10^8 \text{ Moleküle}/e$, so ergibt sich, daß 1,4·10⁸ Moleküle eine elektrische Veränderung erfahren haben, die auf dem Elektrometer einer Elementarladung entsprach. Die elektrische Polarisation jedes einzelnen Moleküls ist demnach im Durchschnitt auch bei der Sättigung noch außerordentlich gering.

Heidelberg, Philipp-Lenard-Institut.

(Eingegangen 31. März 1939)

Bremsvermögen und Trägerbildung der α -Strahlen in Gasen¹⁾

Von Karl Schmieder

(Mit 10 Abbildungen)

Die gegenwärtige Arbeit schließt sich an eine frühere Untersuchung von M. Förster²⁾ an mit dem Ziele, die dort aufgeworfene Frage nach einem etwaigen Bindungseinfluß der Atome in Gasmolekülen auf deren Verhalten gegenüber α -Strahlen an neuen Substanzen weiter zu verfolgen. Dieses Verhalten kann einerseits im Bremsvermögen, andererseits in der totalen Trägerbildung in Erscheinung treten.

Nach älteren Feststellungen von W. H. Bragg und R. D. Kleeman³⁾ setzt sich das Bremsvermögen einiger von ihnen untersuchter Verbindungen additiv aus den Bremsvermögen der die Verbindung aufbauenden Atome zusammen; wir nennen diese Eigenschaft „Additivität des Bremsvermögens“. Im Falle dieser Additivität wäre es mit Hilfe von Bremsvermögensmessungen nicht möglich, Aussagen über den Aufbau des Moleküls mit Bezug auf die Art des Zusammenbaues seiner Atome zu machen, was dagegen der Fall ist, wenn keine Additivität gefunden wird. Bragg und Kleeman hatten auch schon beobachtet, daß es Moleküle gibt, für die das Gesetz der Additivität nicht erfüllt ist. An den Wasserstoffverbindungen C_2H_2 , C_2H_4 , C_2H_6 und CH_4 stellte H. Rausch von Traubenberg⁴⁾, an den Wasserstoffverbindungen H_2O , C_2H_5OH , C_6H_6 und C_5H_5N K. Philipp⁵⁾ Abweichungen von der Additivität fest, und M. Förster hat sehr eingehend den Fall der Wasserstoff-Sauerstoff-Bindung im Wassermolekül untersucht und auch hier deutliche Abweichungen von der Additivität festgestellt.

Wir haben uns im vorliegenden zunächst die Aufgabe gestellt, die Frage am Beispiel des Ozons und seines Zerfalls in Sauerstoff

1) D 16.

2) M. Förster, Ann. d. Phys. [5] 27. S. 373. 1936.

3) W. H. Bragg u. R. D. Kleeman, Phil. Mag. 8. S. 726. 1904; 10. S. 318. 1905; 11. S. 466. 1906.

4) H. R. v. Traubenberg, Ztschr. f. Phys. 5. S. 396. 1921.

5) K. Philipp, Ztschr. f. Phys. 17. S. 23. 1923.

näher zu verfolgen. Wenn auch die technischen Schwierigkeiten dieser Untersuchung kein unüberwindbares Hindernis zu ihrer Durchführung geboten haben, so stellte sich doch schließlich die Unmöglichkeit heraus, die Beobachtungsergebnisse im gewollten Sinne eindeutig zu verwerten, da die große Reaktionsfähigkeit des Ozons die Bildung von Nebelkernen veranlaßte, welche die Trägeruntersuchung störten.

Die Beobachtung wurde daher auf eine Reihe anderer, geeignet erscheinender Substanzen ausgedehnt. Es sind dies die Gase: Luft, Stickstoff, Sauerstoff, Stickoxyd, Stickstoffdioxyd, Stickstoffoxydul, Kohlenoxyd, Kohlendioxyd, Methan, Äthylen, Neon, Argon und Krypton, die, soweit möglich, sowohl in der Verbindung, wie in den Komponenten untersucht wurden. Auf diese Messungen soll im nachfolgenden zunächst näher eingegangen werden. Auf die Ergebnisse mit Ozon kommen wir daran anschließend zurück.

1. Meßweise und Apparatur

Das Beobachtungsverfahren beruht auf der Ermittlung der Trägerstrom-Gasdruck-Kurven für die verschiedenen Gase unter gleichzeitiger Prüfung der Sättigungsverhältnisse. Die Abszisse des Kurvenhöchstwertes dieser Kurven gibt dann ein Maß für das Bremsvermögen, die Ordinate — d. i. dieser Höchstwert selbst — das Maß für die totale Trägerbildung.

Das molekulare Bremsvermögen s ist, bezogen auf das Luftmolekül, definiert durch:

$$s = \frac{\varrho \cdot d \cdot M'}{\varrho' \cdot d' \cdot M},$$

wobei ϱ' die Dichte, M' das Molekulargewicht und d' die Schichtdicke der durchstrahlten Substanz und ϱ die Dichte, M das Molekulargewicht und d die Dicke der äquivalenten Luftschicht bedeutet. Für Gase vereinfacht sich das Verhältnis und es wird, wenn L die Loschmidtzahl ist, da $\frac{L \cdot \varrho}{M} = \frac{L \cdot \varrho'}{M'}$,

$$s = \frac{d}{d'}$$

und wenn die α -Strahlen völlig abgebremst werden, wird das Bremsvermögen gleich dem Verhältnis:

$$s = \frac{R}{R'},$$

wo R bzw. R' die aus den beobachteten Druckwerten berechenbaren Reichweiten bei Normaldruck sind.

Aus der totalen Trägerbildung ergibt sich der für das Zusammenreffen des α -Teilchens mit einem Gasmolekül charakteristische Wert des Energieaustauschs.

Als Strahlenquelle diente ein nicht zu starkes Poloniumpräparat. Das vor diesem verwendete stärkere Präparat war durch ein schwächeres ersetzt worden, da die Präparatfläche aus einer monoatomaren Schicht bestehen muß, um eine Verkleinerung der Reichweite durch die Präparatfläche selbst zu verhindern.

Im einzelnen sah der Apparat wie folgt aus: Um die Strahlen vollständig auszunutzen, waren das Präparat und das zu untersuchende Gas in demselben Meßraum. Dieser war eine Halbkugel (H , Abb. 1), in deren Mittelpunkt sich das Präparat (P) befand. Die Halbkugel war die eine, und zwar spannungsführende Elektrode, der isoliert eingesetzte und mit dem Elektrometer verbundene Präparatsträger die andere. Das Präparat saß zentral so, daß nach jeder Richtung der Strahlweg gleich war und mit der Feldrichtung nahe zusammenfiel. Der auf die Halbkugel vakuumdicht aufgelötete Deckel hatte in der Mitte eine Bohrung mit einem aufgelötetem Rohransatz. In diesem

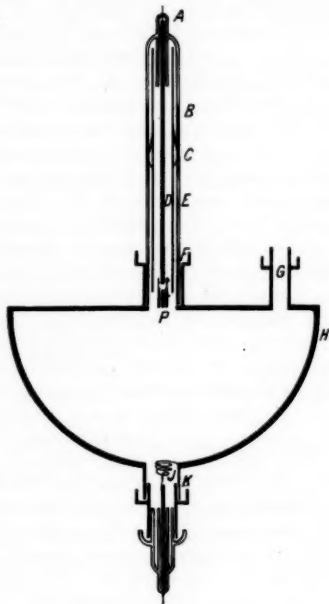


Abb. 1. Meßkammer

Rohransatz war ein Glasrohr eingekittet (F), das eine Kupferrohrs einschmelzung (B) besaß, die zur Vermeidung von Kriechströmen geerdet wurde. Am anderen Ende des Glasrohres befand sich eine Kupferdrahteinschmelzung (A), die nach dem Innern der Kammer die Verbindung zum Präparat und damit zur Innenelektrode und nach außen die Verbindung zum Elektrometer herstellte. Die Zuführung war statisch durch ein geerdetes Messingrohr geschützt, das mit dem eingeschmolzenen Kupferrohr bei (C) verbunden war. Der Rohransatz (G) diente zum Einfüllen der Gase. Unmittelbar mit dem Meßraum in Verbindung stand ein Quecksilbermanometer.

2. Darstellung und Reinigung der Gase

Die Gase wurden, soweit sie nicht aus handelsüblichen Bomben erhalten werden konnten, chemisch dargestellt. Um möglichst reine Gase zu haben, wurde auf die Reinigung in jedem Fall großer Wert gelegt.

1. Die *Luft* wurde mit konzentrierter Schwefelsäure und mit Phosphor-pentoxyd getrocknet, durch ein langes Wattefilter und ein Glaswollefilter von Staubeilchen und Tröpfchen der Schwefelsäure befreit, schließlich noch mit fester Kohlensäure gekühlt, um die letzten Spuren von Wasserdampf und anderen Dämpfen zu beseitigen.

2. Der *Stickstoff* wurde einer Bombe entnommen; die mögliche Verunreinigung von Sauerstoff wurde durch Waschen mit einer alkalischen Natrium-hydroxulfiltration beseitigt. Die Filtration und Trocknung geschah wie bei 1. mit Wattefilter, Schwefelsäure und Phosphor-pentoxyd.

3. Auch der *Sauerstoff* wurde einer Bombe entnommen. Als geringe Beimengungen waren Kohlendioxyd, Wasserdampf und Stickstoff anzunehmen. Zur Absorption von Kohlendioxyd wurde das Gas durch Kalilauge geleitet, getrocknet wurde wie bei 1. Zur Trennung der geringen Stickstoffmengen bei so hohem Sauerstoffgehalt gibt es keine chemisch wirksamen Mittel¹⁾.

4. *Stickoxyd* wurde nach einem Darstellungsverfahren von L.W.Winkler²⁾ durch Reduktion von Kaliumnitritlösung mit Jodwasserstoffsäure gewonnen. Das so dargestellte Gas wurde mit Kalilauge und mit Schwefelsäure gewaschen und mit Phosphor-pentoxyd getrocknet. Wegen der Angreifbarkeit von Kautschuk durch Stickoxyd waren sämtliche Verbindungsstellen zusammengesmolzen und verblasen. Der Zutritt von Luft oder Sauerstoff war unmöglich, eine Oxydation zu Stickstoffdioxyd war also ausgeschlossen.

5. Durch Synthese von Stickoxyd und Sauerstoff wurde *Stickstoffdioxyd* dargestellt. Zur Herstellung von Stickoxyd diente die vorige Methode. Die beiden getrockneten Gase Stickoxyd und Sauerstoff kamen durch je ein mit Phosphor-pentoxyd beschicktes Rohr in ein Mischrohr, dann folgten nochmals Phosphor-pentoxydrohre, schließlich gelangte das Stickstoffdioxyd in einen Kondensationsapparat, der aus zwei Kühltaschen und einem dazwischenliegenden Phosphor-pentoxydrohr bestand. Die Reinigung geschah durch oftmalige fraktionierte Destillation. Um die Oxydation vollkommen durchzuführen, wurde nach jeder Überführung etwas getrockneter Sauerstoff zugegeben. Schließlich wurde das Gas in reinstem Zustand und vor allem frei von Wasserdampf erhalten und in der Meßkammer gesammelt. Da mit der Wasserstrahlpumpe zur Druckänderung bei der Aufnahme der Stromdruckkurve gearbeitet werden mußte, war es sehr wichtig zu vermeiden, daß hiermit kein Wasserdampf in den Meßraum diffundierte. Die Messung wurde deshalb so ausgeführt, daß jedesmal soviel Stickstoffdioxyd durch Kondensieren in einer Kühltasche aus dem Meßraum geholt wurde, bis der gewünschte Druck in diesem erreicht war. Hierauf wurde, nach Abtrennen des Meßraumes, das kondensierte Gas wieder verdampft und mit der Wasserstrahlpumpe weggenommen.

6. *Stickstoffoxydul* konnte einer Bombe entnommen werden. Die möglichen Verunreinigungen waren Spuren von Stickoxyd, Stickstoffdioxyd, Kohlendioxyd,

1) L. Moser, die Reindarstellung von Gasen, S. 64.

2) L. W. Winkler, Chem. Ber. 34. S. 1408. 1901.

Sauerstoff und Wasserdampf. Zur Absorption der drei ersten wurde das Gas mit Ferrosulfatlösung, Kalilauge und konzentrierter Schwefelsäure gewaschen. Durch eine alkalische Lösung von Natriumhydrosulfit wurde der Sauerstoff beseitigt, die Trocknung erfolgte mit Phosphorpentoxyd und durch Kühlung mit fester Kohlensäure.

7. Die Darstellung von Kohlenoxyd geschah durch Eintropfen von Ameisensäure in konzentrierte Schwefelsäure. Als Verunreinigungen können hier Spuren von Luft, Kohlendioxyd, saure Dämpfe und Wasserdampf in Frage kommen. Zur Absorption des Kohlendioxyds und der sauren Dämpfe wurde das Gas mit Kalilauge und zur Absorption von Sauerstoff mit einer alkalischen Lösung von Natriumhydrosulfit gewaschen. Zum Schluß wurde wie üblich getrocknet.

8., 9., 10. Kohlendioxyd, ebenso Methan und Äthylen wurden Bomben entnommen und ohne weitere Reinigung getrocknet benutzt.

11., 12., 13. Die Edelgase Neon, Argon und Krypton wurden Bomben entnommen und in Ausfriergefäßen mit fester Kohlensäure und Phosphorpentoxyd getrocknet. Neon und Argon waren rein, während nach Angabe der Lieferfirma Krypton 5,8% Xenon enthält.

14. Die drei Gasmischungen: ein Teil Stickstoff und ein Teil Sauerstoff, ein Teil Stickstoff und zwei Teile Sauerstoff, und schließlich zwei Teile Stickstoff und ein Teil Sauerstoff wurden so hergestellt, daß bei gleichen äußeren Bedingungen für Druck und Temperatur die entsprechenden Volumenteile der Gase, nachdem die Reinigung nach 2. bzw. 3. zuvor durchgeführt war, in die Meßkammer geleitet wurden.

3. Messungen und Ergebnisse

Vorbereitend wurde die Trägerkammer mehrmals mit dem zu untersuchenden Gas gefüllt und wieder leer gepumpt, bis man sicher sein konnte, daß kein Fremdgas mehr in der Kammer sich befand. Bei den eigentlichen Messungen wurde von einem Gasdruck von ungefähr 760 mm Hg ausgegangen und dann durch stufenweises Auspumpen bei verschiedenen an die Außenelektrode nacheinander angelegten Spannungen die Stromdruckkurve für diese Spannungen aufgenommen.

Abb. 2 zeigt die gemessenen Stromdruckkurven für die Gase Luft, Sauerstoff, Stickstoff, Stickoxyd, Stickstoffdioxyd und Stickoxydul. Aus den Kurven ersieht man, daß der Strom zunächst angenähert dem Druck proportional wächst bis zu einem Gasdruck, bei dem die Kurve umbiegt; von diesem Knickpunkt ab bleibt der Strom fast konstant. Da bei höheren Gasdrucken der Sättigungsgrad geringer ist, sinken die Kurven wieder etwas ab. Zur Festlegung des Sättigungsgrades wurde bei dem Gasdruck, bei dem der Knickpunkt der Kurve lag, die Stromspannungskurve aufgenommen. Als Beispiel zeigt Abb. 3 die Stromspannungskurve für Stickstoff. Man sieht, daß die meist benutzte Spannung von 700 Volt praktisch sehr nahe zur Sättigung führt. Der Knickpunkt der Strom-

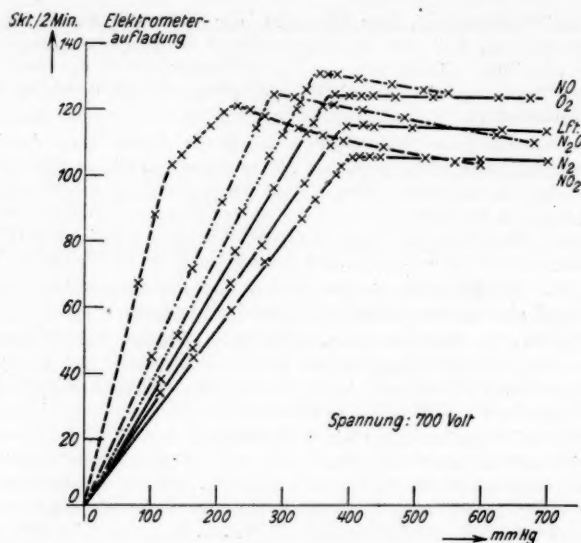


Abb. 2. Stromdruckkurven für: Luft, N_2 , O_2 , NO, NO_2 und N_2O , alle auf $0^\circ C$ und gleiche Präparatstärke reduziert

druckkurve liegt bei dem Gasdruck (p), bei dem die α -Strahlen gerade vollständig zur Trägerbildung ausgenutzt werden. Dieser Druck (p) ist der Reichweite in diesem Gas proportional. Die

Größe der Halbkugel war so gewählt, daß der Abstand Präparat-Gefäßwand größer war als die Reichweite der α -Teilchen bei atm. Druck in den verschiedenen Gasen.

Ist die Reichweite bei einem Druck (p) und der Temperatur (t) $R_{t,p}$ gleich dem Radius der Halbkugel, so kann aus dem gemessenen Druck (p), der Versuchstemperatur (t) und dem Radius der Halbkugel ($R_{t,p} = 7,2$ cm) die Reichweite in dem betreffenden Gas bestimmt werden:

$$R_{0,760} = R_{t,p} \frac{p}{(1 + \alpha \cdot t) \cdot p_0}$$

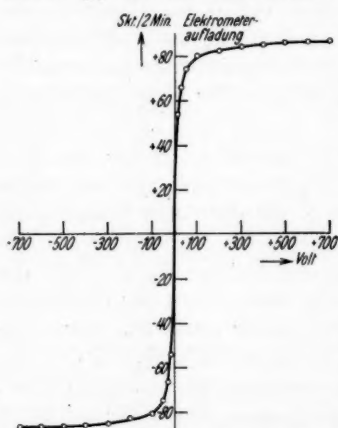


Abb. 3. Stromspannungskurve für Stickstoff. Gasdruck: 430 mm Hg

Aus dieser Reichweite wurde dann später das molekulare Bremsvermögen wie eingangs angegeben berechnet.

Da als Bezugsgas für alle Messungen Luft verwendet wurde, mußte zunächst deren Verhalten gegen die α -Strahlen sorgfältig untersucht werden. Aus einer Reihe von Trägermessungen für beide Vorzeichen bei systematisch variiertem Druck ergab sich für den zum Kurvenknickpunkt gehörigen Druck der Wert $p = 420$ mm bei $17,5^\circ$, woraus sich $R_{0,760} = 3,74$ cm berechnet.

Nun ist noch die Meßgenauigkeit zu beachten. Der Druck konnte auf 1 mm genau abgelesen werden, der Strahlweg ist mit Beachtung der Fehlergrenze $7,2 \pm 0,5$ cm. Es ergeben sich hiernach folgende Extremwerte für Luft: $R_{0,760} = 3,73 \pm 0,04$ cm.

Da bei der Berechnung des Bremsvermögens der anderen Gase aus ihren Reichweitewerten diese Ungenauigkeit der Reichweitebestimmung für Luft und außerdem die Ungenauigkeit aus gleicher Ursache bei der Reichweitemessung des betreffenden Gases eingeht, muß auch hier die Fehlergrenze beachtet werden.

Zur Prüfung der Meßgenauigkeit dienten die Reichweitemessungen an den Gasgemischen, für die ja die Reichweite aus der Kenntnis der Reichweite ihrer Komponenten berechenbar ist.

Die für Sauerstoff und Stickstoff und drei ihrer Mischungen festgestellten Trägerkurven zeigt Abb. 4.

Aus ihr ergibt sich das auf das Luftmolekül bezogene Bremsvermögen für Stickstoff und Sauerstoff zu:

$$s_{\text{mol.}}(\text{N}_2) = 0,99 \pm 0,02, \quad s_{\text{mol.}}(\text{O}_2) = 1,07 \pm 0,02.$$

Das erste Gemisch setzte sich im Verhältnis $\text{N}_2 + \text{O}_2$ zusammen. Es berechnet sich deshalb mit den obigen Bremsvermögenswerten das auf das Luftmolekül bezogene molekulare Bremsvermögen für ein „Gemisch“-Molekül zu:

$$s_{\text{N}_2+\text{O}_2} = \frac{s_{\text{N}_2} + s_{\text{O}_2}}{2} = 1,03 \pm 0,02.$$

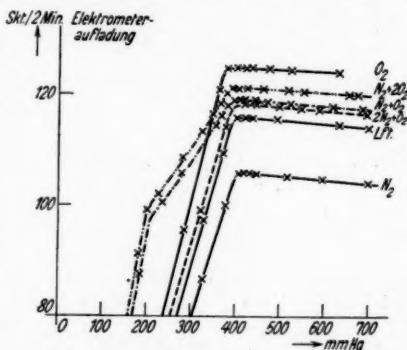


Abb. 4. Stromdruckkurven für: Luft, O_2 , N_2 und die drei Gasgemischen $\text{N}_2 + \text{O}_2$, $\text{N}_2 + 2\text{O}_2$, $2\text{N}_2 + \text{O}_2$, alle auf 0°C und gleiche Präparatstärke reduziert

Der gemessene Wert ist:

$$s_{N_2+O_2} = 1,03 \pm 0,02.$$

Entsprechend ist der berechnete Wert für das Gemisch, das sich im Verhältnis $N_2 + 2O_2$ zusammensetzt:

$$s_{N_2+2O_2} = \frac{s_{N_2} + 2s_{O_2}}{3} = 1,04 \pm 0,02.$$

Der gemessene Wert ist:

$$s_{N_2+2O_2} = 1,03 \pm 0,02.$$

Der berechnete Wert für das dritte Gemisch, das sich im Verhältnis $2N_2 + O_2$ zusammensetzt, ist:

$$s_{2N_2+O_2} = \frac{2s_{N_2} + s_{O_2}}{3} = 1,01 \pm 0,02.$$

Der gemessene Wert ist:

$$s_{2N_2+O_2} = 1,01 \pm 0,02.$$

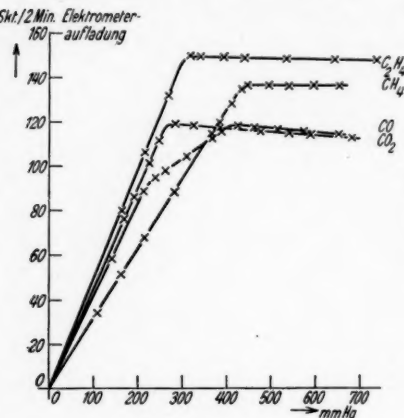


Abb. 5. Stromdruckkurven für: CO , CO_2 , CH_4 und C_2H_4 , alle auf $0^\circ C$ und gleiche Präparatstärke reduziert

Man sieht, daß die gemessenen Werte mit den aus den Komponenten berechneten innerhalb der Fehlergrenze völlig übereinstimmen.

Benutzt man die gemessenen Werte des Bremsvermögens von Stickstoff und Sauerstoff, um damit das Bremsvermögen von Luft zu berechnen, so erhält man folgenden Wert:

$$s_{Luft} = \frac{4s_{N_2} + s_{O_2}}{5} = 1,00 \pm 0,02,$$

d. i. also die Einheit, wie es unserer Definition von s entspricht.

Die für die Kohlenstoffverbindungen mit Wasserstoff und Sauerstoff gefundenen Kurven veranschaulicht Abb. 5, und Abb. 6 gibt die entsprechenden Befunde für die benutzten Edelgase.

Die folgende Tab. 1 zeigt eine Zusammenstellung der beobachteten Reichweiten und der daraus ermittelten Bremsvermögen aller untersuchten Gase.

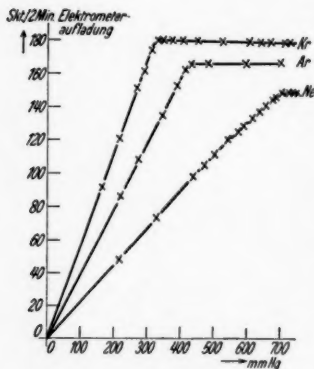


Abb. 6. Stromdruckkurven für: Ne , Ar und Kr , alle auf $0^\circ C$ und gleiche Präparatstärke reduziert

Tabelle 1

Gas	$R_{0^\circ, 760}$ in cm	$s_{\text{mol.}}$
Luft	$3,73 \pm 0,04$	$1,00 \pm 0,00$
Stickstoff	$3,78 \pm 0,04$	$0,99 \pm 0,02$
Sauerstoff	$3,50 \pm 0,03$	$1,07 \pm 0,02$
Stickoxyd	$3,32 \pm 0,03$	$1,12 \pm 0,02$
Stickstoffdixyd	$2,14 \pm 0,02$	$1,75 \pm 0,04$
Stickstoffoxydul	$2,66 \pm 0,03$	$1,40 \pm 0,03$
Kohlenoxyd	$3,89 \pm 0,04$	$0,96 \pm 0,02$
Kohlendixyd	$2,51 \pm 0,03$	$1,49 \pm 0,03$
Methan	$4,13 \pm 0,04$	$0,91 \pm 0,02$
Äthylen	$2,86 \pm 0,03$	$1,31 \pm 0,02$
Neon	$6,63 \pm 0,05$	$0,56 \pm 0,01$
Argon	$3,95 \pm 0,04$	$0,95 \pm 0,02$
Krypton	$3,03 \pm 0,03$	$1,23 \pm 0,02$
$\text{N}_2 + \text{O}_2$	$3,63 \pm 0,03$	$1,03 \pm 0,02$
$\text{N}_2 + 2 \text{O}_2$	$3,61 \pm 0,04$	$1,03 \pm 0,02$
$2 \text{N}_2 + \text{O}_2$	$3,69 \pm 0,03$	$1,01 \pm 0,02$

4. Auswertung der Ergebnisse

Es folgt nun die Berechnung der auf das Luftmolekül bezogenen molekularen Bremsvermögen der drei Stickstoff-Sauerstoff-Verbindungen: NO, NO₂ und N₂O, aus den beobachteten Bremsvermögen ihrer Komponenten.

Für Stickstoff ist: $s_{\text{N}} = \frac{s_{\text{N}_2}}{2}$, für Sauerstoff $s_{\text{O}} = \frac{s_{\text{O}_2}}{2}$, hieraus würde sich im Falle reiner Additivität berechnen:

$$s_{\text{NO}} = \frac{s_{\text{N}_2} + s_{\text{O}_2}}{2} = 1,03 \pm 0,02,$$

$$s_{\text{NO}_2} = \frac{s_{\text{N}_2} + 2s_{\text{O}_2}}{2} = 1,56 \pm 0,03,$$

$$s_{\text{N}_2\text{O}} = \frac{2s_{\text{N}_2} + s_{\text{O}_2}}{2} = 1,52 \pm 0,03.$$

In der folgenden Tabelle sind die gemessenen Werte mit diesen berechneten zusammengestellt:

Tabelle 2

Gas	Molekulares Bremsvermögen bezogen auf ein Luftmolekül		Abweichung
	beobachtet	additiv berechnet	
NO	$1,12 \pm 0,02$	$1,03 \pm 0,02$	$+0,09 \pm 0,04$
NO ₂	$1,75 \pm 0,04$	$1,56 \pm 0,03$	$+0,19 \pm 0,07$
N ₂ O	$1,40 \pm 0,03$	$1,52 \pm 0,03$	$-0,12 \pm 0,06$

Das beobachtete Bremsvermögen ist also für NO und NO₂ um etwa 9 bzw. 12% größer, für N₂O um rund 8% kleiner als im Falle der Additivität zu erwarten wäre.

Wir berechnen nun aus den Beobachtungen an Kohlenoxyd und Kohlendioxyd mit Hilfe des aus dem Sauerstoffmolekül gewonnenen Bremsvermögenswertes für das Sauerstoffatom nach Annahme der Additivität, das auf das Luftmolekül bezogene atomare Bremsvermögen für Kohlenstoff:

1. Aus Kohlenoxyd wird

$$\begin{aligned}s_{\text{CO}} &= 0,96 \pm 0,02 \text{ beobachtet} \\ &= s_{\text{C}} + (0,53 \pm 0,01),\end{aligned}$$

hieraus

$$s_{\text{C}} = 0,44 \pm 0,02.$$

2. Aus Kohlendioxyd wird

$$\begin{aligned}s_{\text{CO}_2} &= 1,49 \pm 0,03 \text{ beobachtet} \\ &= s_{\text{C}} + (1,07 \pm 0,02),\end{aligned}$$

hieraus

$$s_{\text{C}} = 0,43 \pm 0,05.$$

Die beiden so aus den Verbindungen berechneten Werte für das atomare Bremsvermögen des Kohlenstoffs stimmen innerhalb der Fehlergrenze gut überein. Daß sich Kohlenoxyd und Kohlendioxyd angenähert additiv verhalten, wurde schon von W. H. Bragg und R. D. Kleeman¹⁾ festgestellt. Der von Bragg für das atomare Bremsvermögen des Kohlenstoffs gefundene Wert ist 0,425 und stimmt gut mit dem von uns gefundenen überein.

Ebenso wie hier kann man nun das atomare Bremsvermögen des Wasserstoffs mit Hilfe des gefundenen Wertes für s_{C} aus den gemessenen Werten des Bremsvermögens von Methan und Äthylen berechnen:

1. Aus Methan wird

$$\begin{aligned}s_{\text{CH}_4} &= 0,91 \pm 0,02 \text{ beobachtet} \\ &= s_{\text{C}} + 4s_{\text{H}},\end{aligned}$$

hieraus

$$s_{\text{H}} = 0,12 \pm 0,02.$$

2. Aus Äthylen wird

$$\begin{aligned}s_{\text{C}_2\text{H}_4} &= 1,31 \pm 0,02 \text{ beobachtet} \\ &= 2s_{\text{C}} + 4s_{\text{H}},\end{aligned}$$

hieraus

$$s_{\text{H}} = 0,11 \pm 0,03.$$

Die beiden so aus den Verbindungen für das atomare Bremsvermögen erhaltenen Werte für Wasserstoff fallen innerhalb der Fehlergrenze zusammen.

1) W. H. Bragg u. R. D. Kleeman, *Phil. Mag.* (6) 8. S. 726. 1904; 10. S. 318. 1905; 11. S. 466. 1906.

5. Versuch einer Diskussion nach der chemischen Bindung

Aus den Ergebnissen sieht man, daß mit Ausnahme der Stickstoff-Sauerstoff-Verbindungen für alle anderen Gase das Gesetz der Additivität angenähert erfüllt ist. Bei der Berechnung des molekularen Bremsvermögens aus der Summe der atomaren setzt man voraus, daß das atomare Bremsvermögen eines Atomes bei Verbindung mit einem artgleichen Atom denselben Wert hat wie in Verbindungen mit anderen Atomen. Die Ergebnisse an den Stickstoff-Sauerstoff-Verbindungen deuten darauf hin, daß diese Voraussetzung nicht immer erfüllt ist. Zur Erklärung könnte man annehmen, daß ja der Stickstoff in diesen Verbindungen verschiedene Wertigkeiten besitzt, daß das atomare Bremsvermögen des Stickstoffs von seiner Wertigkeit abhängt.

Die Darstellung der Stickstoff-Sauerstoff-Verbindungen in Strukturformeln ist folgende, wenn man nur drei- und fünfwertigen Stickstoff gelten läßt:

- | | | |
|----|--------|---|
| 1. | N_2 | $N \equiv N$ |
| 2. | N_2O | $N \equiv N = O$ |
| 3. | NO | $-N = O$ |
| 4. | NO_2 | $-N \begin{smallmatrix} \diagup O \\ \diagdown O \end{smallmatrix}$ |

N_2 und N_2O stellen also „gesättigte“, dagegen NO und NO_2 „ungesättigte“ Verbindungen dar.

Macht man nun die Annahme, daß für „gesättigte“ Verbindungen die Additivität erfüllt ist, so kann man sich aus den beiden gesättigten Verbindungen, in denen sowohl drei- als auch fünfwertiger Stickstoff vorkommt, die beiden Bremsvermögen der zwei verschiedenwertigen Stickstoffe berechnen. Rechnet man sich mit diesen Werten nach der Additivität die molekularen Bremsvermögen der beiden ungesättigten Verbindungen aus und vergleicht diese Werte mit den beobachteten Werten, so erhält man Abweichungen, die durch den „ungesättigten“ Zustand des drei- bzw. fünfwertigen Stickstoffs bedingt sein könnten.

Im folgenden sei diese Rechnung durchgeführt (vgl. Tab. 1):

$$s_{\text{mol.}} (N \equiv N) = 0,99$$

$$s_{\text{at.}} (N)^{\text{III}} = 0,495$$

für Sauerstoff ist

$$s_{\text{at.}} (O)^{\text{II}} = 0,535$$

aus N_2O berechnet sich

$$\begin{aligned}s_{\text{mol.}}(N \equiv N = O) &= 1,40 \\ &= 0,495 + s_{\text{at.}}(N)^v + 0,535 \\ s_{\text{at.}}(N)^v &= 1,40 - 1,030 \\ &= 0,370.\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser atomaren Bremsvermögen des drei- und fünfwertigen Stickstoffs würde im Falle der Additivität für das molekulare Bremsvermögen von NO und NO_2 zu erwarten sein:

$$\begin{aligned}s_{\text{mol.}}(-N=O) &= 0,495 + 0,535 = 1,030 \\ s_{\text{mol.}}(-N \leq \overset{O}{O}) &= 0,370 + 2(0,535) = 1,440.\end{aligned}$$

Es wurde demgegenüber beobachtet

$$s_{NO} = 1,12 \quad \text{und} \quad s_{NO_2} = 1,75,$$

das sind Werte, die um 0,09 bzw. 0,31 zu hoch gefunden werden.

Es erscheint hiernach die Annahme berechtigt, daß der ungesättigte Zustand sich in einem erhöhten Bremsvermögen äußert.

6. Messung der Gesamtträgerbildung in verschiedenen Gasen relativ zu Luft

Wir schreiten jetzt zur Auswertung der *Ordinaten* der beobachteten Kurven. Wie schon erwähnt, wurde bei dem Druck, bei dem der Knickpunkt der Stromdruckkurve lag, durch Aufnahme der Stromspannungskurven der Sättigungsstrom ermittelt. Mit diesem Stromwert wurde, nach Reduktion auf gleiche Präparatstärke, die Gesamtträgerbildung relativ zu Luft berechnet¹⁾.

Nach jeder Messung der verschiedenen Gase wurde eine Kontrollmessung in Sauerstoff gemacht, um sicher zu sein, daß das verwendete Gas nichts an der Poloniumschicht änderte. Alle Kontrollmessungen, mit einer Ausnahme, ergaben wieder die gleiche Strahlungsintensität.

Die Ausnahme stellte sich bei den Versuchen mit Stickstoffdioxid ein, nachdem alle anderen Gase bis auf CO und 2 Stickstoff-Sauerstoff-Verbindungen ($N_2 + O_2$; $N_2 + 2 O_2$) in einwandfreier Weise durchgemessen waren. Schon die Beobachtung des Manometers zeigte hier, im Gegensatz zu den Versuchen mit den anderen Gasen, nach dem Einfüllen des Stickstoffdioxides in die Meßkammer eine Druckänderung im Meßraum. Diese Druckänderung kann nur durch

1) Die aus der Aktivitätsabnahme des Präparats gefundene Halbwertszeit von im Mittel 132,5 Tagen fällt nahe mit dem exakten Wert von 136,5 Tagen für Polonium zusammen, was auf gute Homogenität unseres Präparats hinweist.

stattgefundene Reaktionen bedingt gewesen sein, die durch Anwesenheit von Feuchtigkeitsspuren hervorgerufen wurden. Auf das Präparat mußte sich eine, allerdings nicht überall deckende Schicht niedergeschlagen haben, da an der darauf gemachten Kontrollmessung im Sauerstoff kleinere Maximalströme und ein zweiter Knickpunkt in der Stromdruckkurve beobachtet wurde. Bei den weiteren Versuchen mit Stickstoffdioxid wurde auf äußerste Trockenheit der Kammer wie des Gases geachtet, und es gelang dann, Messungen auszuführen, die gleichbleibende Stromdruckkurven lieferten, so daß es doch noch möglich war, über das Verhalten dieses Gases sichere Aussagen zu machen. Dabei wurde der zweite Knickpunkt der Stromdruckkurve zum Vergleich und Anschluß an die anderen Messungen verwendet, wie sich dies aus der Kontrollmessung mit Sauerstoff als erforderlich erwies.

Die folgende Tabelle zeigt in der ersten Kolonne die Meßergebnisse der Gesamtträgerbildung in den verschiedenen Gasen relativ zu Luft.

Tabelle 3

Gas	Gesamtträgerstrom relativ zu Luft	Energie pro Trägerpaar s in eV	Trägerbildungs- spannung T in eV
Luft	1,000	34,80	11,0 ¹⁾
N ₂	0,965	36,10	15,8 ²⁾
O ₂	1,075	32,40	12,5 ²⁾
NO	1,135	30,05	9,5 ²⁾
NO ₂	1,052	33,00	11,0 ²⁾
N ₂ O	1,075	32,40	12,9 ²⁾
CO	1,025	34,00	14,1 ²⁾
CO ₂	1,028	33,90	14,4 ²⁾
CH ₄	1,184	29,40	14,5 ²⁾
C ₂ H ₄	1,290	27,00	12,2 ²⁾
Ne	1,280	27,20	21,47 ²⁾
Ar	1,430	24,37	15,81 ²⁾
Kr	1,550	22,43	13,94 ²⁾
N ₂ + O ₂	1,035	33,90	
N ₂ + 2 O ₂	1,045	33,80	
2 N ₂ + O ₂	1,020	34,20	

Mit Hilfe dieser Werte, der bekannten Anfangsgeschwindigkeit der α -Teilchen des Poloniums und der bekannten Gesamtzahl der von einem α -Teilchen in Luft erzeugten Trägerpaare wurde noch

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 8. S. 194. 1902.

2) W. de Groot u. F. M. Penning, Hdb. d. Phys. 23/1, S. 141. Wir müssen uns mit dieser Zusammenstellung begnügen, da die im Landolt-Börnstein gegebenen Daten, [auf die im Handbuch der experim. Physik verwiesen wird, ohne Heraushebung der bestgemessenen Werte zusammengestellt sind und eine Auswahl aus diesen Werten durch uns nicht möglich war.

die für die verschiedenen Gase aufgewendete Energie pro Trägerpaar (ϵ) berechnet.

Die Anfangsgeschwindigkeit v der α -Teilchen des Poloniums ist: $1,59 \cdot 10^9$ cm/sec¹⁾, $5,22 \cdot 10^6$ eV und die Gesamtzahl der von einem α -Teilchen des Poloniums in Luft erzeugten Trägerpaare k ist: $1,50 \cdot 10^5$ ¹⁾. Hiermit ergeben sich die Werte der zweiten Kolonne der Tabelle. Wir haben schließlich noch die dem Schrifttum entnommenen Angaben für die Trägerbildungsspannung (T) in Kolonne 3 mit aufgenommen.

7. Messungen an Ozon

Die Meßapparatur war die gleiche, wie bei den vorigen Versuchen. Der Glühdraht (*J* Abb. 1) in dem unteren Rohransatz der Halbkugel diente zum Einleiten der Explosion, die das Ozon vollständig in Sauerstoff umwandelte. Die Darstellung des Ozons geschah mittels zweier hintereinandergeschalteter Siemens-Ozonisatoren, durch die ein kontinuierlicher, mit Schwefelsäure getrockneter und durch Wattefilter gereinigter Sauerstoffstrom aus einer Bombe eingeleitet wurde. Das entstandene Ozon-Sauerstoff-Gemisch wurde in einer mit flüssiger Luft gekühlten Kühltasche verflüssigt. Da der Dampfdruck des Sauerstoffs bei -190°C über 15 mm Hg, jener des Ozons dagegen darunter liegt, konnte durch Auspumpen bis auf 15 mm Hg der Sauerstoff aus dem Gemisch weggenommen werden, wodurch reines Ozon im flüssigen Zustand erhalten wurde. Das flüssige Ozon wurde dann langsam unter größter Vorsicht verdampft und in der Meßkammer, die zuvor evakuiert worden war, gesammelt. Dieses Verdampfen mußte deshalb unter größter Vorsicht stattfinden, da bei schnellem Verdampfen flüssigen Ozons größte Explosionsgefahr besteht. Leider ließen sich nicht immer Explosionen vermeiden, die wegen ihrer Heftigkeit mehrmals Neubau der Apparatur nötig machten. Das Quecksilber des Druckmessers wurde durch flüssiges Paraffin abgedeckt, und für die Dichtung der Hähne mußte ein besonderes Fett ausprobiert werden. Versuche in reinem Ozon sind wegen des spontanen Zerfalls nicht durchführbar.

Es wurden daher folgende Versuche gemacht: Eine bestimmte Menge Ozon, von der schon gleich nach dem Verdampfen eine kleine Menge zu Sauerstoff zerfiel, wurde in die Kammer, an der Spannung lag, gefüllt, dann der Eigenzerfall des Ozons mit der Zeit aus Druckmessungen bestimmt und zu bestimmten Zeiten die Aufladung des Elektrometers in bestimmter Zeit ermittelt. Nach

1) Meyer-Schweidler, Radioaktivität 2. Aufl. 1927. S. 466.

einigen Stunden, wenn dann der Eigenzerfall des Ozons zu langsam vor sich ging, wurde mit Hilfe des Glühdrahtes das restliche noch nicht zerfallene Ozon durch Explosion in Sauerstoff übergeführt. Dabei wurde das Präparat zum Schutz vor der Stichflamme der Explosion während dieses Vorganges durch einen Metallschieber, der in der Abb. 1 nicht sichtbar ist, abgedeckt. Der Schieber konnte von außen magnetisch bedient werden.

Ergebnisse. Abb. 7 zeigt zwei der gemessenen Kurven, und zwar die Eigenzerfallskurve des Ozons, dargestellt durch die Druckänderung, und jene, die sich aus den Stromwerten ergibt, die zu den verschiedenen Zeiten des Ozoneigenzerfalls gemessen wurden. Die Sprungstelle in der Eigenzerfallskurve liegt bei dem Zeitpunkt, bei dem die Explosion eingeleitet wurde.

Beim Übergang vom Ozon zu Sauerstoff, bei so hohen Drucken, bei denen man sicher war, daß beim Enddruck, also im reinen Sauerstoff, alle α -Teilchen völlig abgebremst und zur Trägerbildung ausgenutzt wurden, konnte ein kleiner Anstieg des Stromwertes festgestellt werden. Ferner zeigten die im Ozon, die in verschiedenen Ozon-Sauerstoff-Konzentrationen und schließlich die in reinem Sauerstoff aufgenommenen Stromspannungskurven, daß im Ozon die Sättigung schwerer zu erreichen ist als im Sauerstoff.

Die Tatsache, daß im Ozon weniger Träger gebildet werden als im Sauerstoff, deutet wohl darauf hin, daß die gleiche hineingesteckte Energie im Ozon noch zu etwas anderem als zur Trägerbildung verwendet wird. Diese Energie könnte zur Desozonisierung als Dissoziationsenergie verbraucht werden. Versuche, die zur Bekräftigung dieser Annahme unternommen wurden, ließen nicht erkennen, ob die α -Strahlen des Poloniumpräparates einen Beitrag zum Zerfall des Ozons lieferten, da das Präparat zu schwach war, als daß damit aus den gemessenen Druckänderungen, gegenüber denen ohne Präparat, ein Unterschied festzustellen gewesen wäre.

Nach der Explosion konnte noch ungefähr 5 Min. lang ein im Verhältnis zu großer Strom gemessen werden. Diese Erscheinung

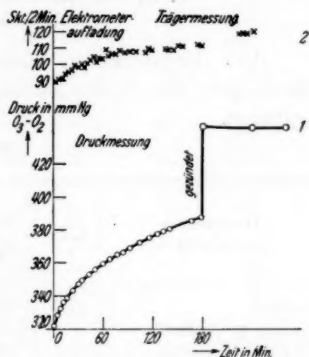


Abb. 7. 1 Eigenzerfallskurve des Ozons; 2 Kurve, die sich aus den Stromwerten ergibt, die zu den verschiedenen Zeiten des Ozoneigenzerfalls gemessen wurden

könnte von schweren Teilchen herrühren, die während der Explosion geladen werden und die sich dann trotz angelegtem Feld, wegen ihrer geringen Wanderungsgeschwindigkeit, noch eine gewisse Zeit halten und als ungeladene Komplexe schon vor der Explosion infolge von Ozonreaktionen mit vorhandenen Dämpfen in der Kammer sein können, wie dies schon von A. Becker (Ann. d. Phys. **36**. S. 209. 1911) an anderen Ozonreaktionen beobachtet und gemessen wurde.

8. Zusammenstellung unserer Meßergebnisse mit den bisherigen Befunden

Aus der folgenden Tabelle ist ersichtlich, wie weit unsere Messungen die Beobachtungen anderer Autoren bestätigen bzw. ergänzen.

Tabelle 4

Beobachter u. Literatur	Gas	R_0 ; 760 in cm	Molekulares Brems- vermögen bezogen auf d. Luftmolekül		Gesamt- trägerstrom relativ zu Luft=1
			beob.	ber.	
Levin ¹⁾	Luft	3,66	—	—	—
Geiger u. Nuttal ²⁾ . .		3,57	—	—	—
Taylor ³⁾		3,59	—	—	—
Meyer, Hess u. Paneth ⁴⁾		3,65	—	—	—
Lawson ⁵⁾		3,66	—	—	—
Geiger ⁶⁾		3,72 ₁	—	—	—
Merwe ⁷⁾		3,77	—	—	—
Onada ⁸⁾		3,67	—	—	—
Harper u. Salaman ⁹⁾ .		3,67	—	—	—
Mäder ¹⁰⁾		3,73	—	—	—
Naidu ¹¹⁾		3,68	—	—	—
Ürmenyi ¹²⁾		3,67	—	—	—
Eigene Messung . . .		3,73	—	—	—
Taylor ³⁾	N ₂	—	—	—	0,96
Merwe ⁷⁾		3,82	0,99	—	—
Harper u. Salaman ⁹⁾ .		3,70	0,99	—	—
Mäder ¹⁰⁾		3,96	0,94	—	1,01
Ürmenyi ¹²⁾		3,70	0,99	—	0,98
Eigene Messung . . .		3,78	0,99	—	0,965
Taylor ³⁾	O ₂	3,25	1,10	—	1,13
Merwe ⁷⁾		3,50	1,08	—	—
Harper u. Salaman ⁹⁾ .		3,45	1,06	—	—
Mäder ¹⁰⁾		3,53	1,06	—	1,09
Ürmenyi ¹²⁾		3,46	1,06	—	1,055
Eigene Messung . . .		3,50	1,07	—	1,075
Merwe ⁷⁾	NO	3,40	1,11	1,02	—
Eigene Messung . . .		3,32	1,12	1,03	1,135
Eigene Messung . . .	NO ₂	2,14	1,75	1,56	1,052

Tabelle 4 (Fortsetzung)

Beobachter u. Literatur	Gas	R_0 ; 760 in cm	Molekulares Brems- vermögen bezogen auf d. Luftmolekül		Gesamt- trägerstrom relativ zu Luft=1
			beob.	ber.	
Eigene Messung . . .	N ₂ O	2,66	1,40	1,52	1,075
Merwe ⁷⁾	CO	3,70	1,02	0,98	—
Eigene Messung . . .		3,89	0,96	—	1,025
Taylor ³⁾	CO ₂	—	—	—	1,01
Merwe ⁷⁾		2,49	1,52	1,51	—
Mäder ¹⁰⁾		2,57	1,45	—	1,01
Ürmenyi ¹²⁾		2,50	1,47	—	—
Eigene Messung . . .		2,51	1,49	—	1,028
Taylor ³⁾	CH ₄	—	—	—	1,18
Merwe ⁷⁾		4,18	0,91	0,98	—
Eigene Messung . . .		4,13	0,91	—	1,184
Eigene Messung . . .	C ₂ H ₄	2,86	1,31	—	1,29
Naidu ¹¹⁾	Ne	6,53	0,56	—	1,3
Eigene Messung . . .		6,63	0,56	—	1,290
Harper u. Salaman ⁹⁾ .	Ar	3,95	0,93	—	—
Naidu ¹¹⁾		3,98	0,92	—	1,45
Eigene Messung . . .		3,95	0,95	—	1,430
Naidu ¹¹⁾	Kr	2,87	1,26	—	1,45
Eigene Messung . . .		3,03	1,23	—	1,55

- 1) M. Levin, Phys. Ztschr. 47. S. 521. 1906.
- 2) H. Geiger u. I. M. Nuttal, Phil. Mag. 22. S. 613. 1911.
- 3) T. S. Taylor, Phil. Mag. 26. S. 402. 1913.
- 4) St. Meyer, V. H. Hess u. F. Paneth, Wiener Ber. 123. S. 145. 1914.
- 5) R. W. Lawson, Wiener Ber. 124. S. 637. 1915.
- 6) H. Geiger, Ztschr. f. Phys. 8. S. 45. 1921.
- 7) v. d. Merwe, Phil. Mag. 45. S. 379. 1923.
- 8) T. Onada, Journ. de Phys. et le Rad. 9. S. 185. 1928.
- 9) G. Harper u. E. Salaman, Proc. Roy. Soc. 127. S. 175. 1930.
- 10) M. Mäder, Ztschr. f. Phys. 77. S. 601. 1932.
- 11) R. Naidu, Journ. de Phys. et le Rad. 5. S. 575. 1934.
- 12) L. Ürmenyi, Helv. Phys. acta. 10. S. 287. 1937.

9. Überblick über die Ergebnisse

Wenn man die Ergebnisse der an zahlreichen Gasen nebeneinander durchgeführten Messungen des Bremsvermögens, der totalen Trägerbildung und der hieraus sich ergebenden mittleren Energie pro Trägerpaar und schließlich der Trägerbildungsspannung zusammenfassend überblickt, so liegt es nahe, Beziehungen zwischen diesen

Größen untereinander aufzusuchen, die der Natur des Erscheinungskomplexes gemäß zu erwarten sind. Von seiten der Theorie sind solche Beziehungen bereits mehrfach entwickelt worden¹⁾, ohne daß

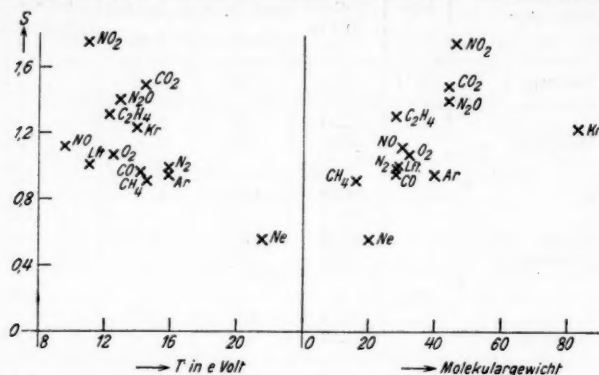


Abb. 8. Zusammenhang des Bremsvermögens mit der Trägerbildungs-
spannung und dem Molekulargewicht

aber eine ausreichende Prüfung derselben an der Erfahrung durchgeführt worden ist.

Die Bremsung der α -Strahlen in Gasen beruht auf dem Energieverlust der α -Teilchen durch unelastische Stöße mit den Gasatomen.

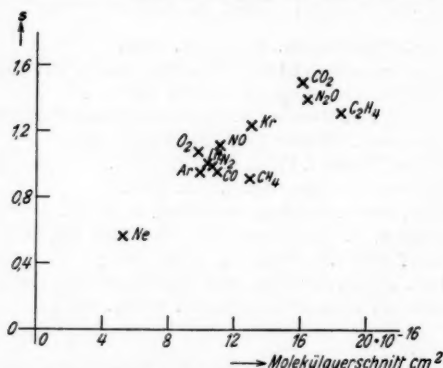


Abb. 9. Zusammenhang des Bremsvermögens mit dem Molekülquerschnitt

Folgen dieses Vorgangs können sein: Trägerbildung, Anregung und Dissoziation. Wäre die Trägerbildung der einzige Vorgang, der zum

1) G. H. Henderson, Phil. Mag. **44**. S. 680. 1922; H. Bethe, Ann. d. Phys. [5] **5**. S. 325. 1930.

Energieverlust führt, so wäre zu erwarten, daß das Bremsvermögen ϵ mit der Trägerbildungsspannung T wächst. Ein solcher Zusammenhang ist aber, wie aus dem ersten Teil der Abb. 8 ersichtlich, keineswegs vorhanden. Auch die mittlere Energie pro Trägerpaar ϵ hat auf ϵ keinen ersichtlichen Einfluß, was daraus hervorgeht, daß ϵ nur wenig variiert, während s deutliche Verschiedenheiten zeigt. Eher könnten wir eine Andeutung dafür finden, daß das Bremsvermögen mit wachsendem Molekulargewicht zunimmt, wie aus dem zweiten Teil der Abb. 8 zu sehen ist. Eine gewisse Abweichung von der ungefähren Proportionalität zeigt sich nur bei den Edelgasen. Ein einfacher Zusammenhang des Bremsvermögens mit der Ordnungszahl, wie er gerade durch die Theorie nahegelegt wird, kann noch weniger festgestellt werden. Offensichtlich wird aber s wesentlich durch die Stoßzahl auf der Wegeinheit, d. h. durch den Molekülquerschnitt der Gase beeinflusst, wie aus Abb. 9¹⁾ ersichtlich ist. Es ist hier eine ungefähre Proportionalität beider Größen angedeutet, und man wird die Abweichungen hiervon den besonderen Einflüssen von ϵ bzw. T zuzuschreiben haben.

Beachtenswert ist, daß zwischen ϵ und T bei gewissen Gruppen von Gasen eine nahe lineare Beziehung besteht und daß die Differenz von ϵ und T bei den Edelgasen, wo Energieverbrauch durch Dissoziation überhaupt wegfällt, am geringsten ist (vgl. Abb. 10).

10. Zusammenfassung

1. Es wurden für die Polonium- α -Strahlen Reichweite und Gesamtträgerbildung gemessen in den Gasen: Luft, N_2 , O_2 , NO, NO_2 , N_2O , CO, CO_2 , CH_4 , C_2H_4 , Ne, Ar und Kr und für die Gasmischungen: $N_2 + O_2$, $N_2 + 2O_2$ und $2N_2 + O_2$; außerdem wurde die Gesamtträgerbildung von O_2 mit der von O_3 verglichen.

1) Der Querschnitt der Gasmoleküle wurde aus den im Landolt-Börnstein, 5. Aufl., I, S. 119, angegebenen Gesamtquerschnitt aller in 1 cm^3 Gas bei 0° und 760 mm vorhandenen Moleküle berechnet, die mit Benutzung des Koeffizienten der inneren Reibung der Substanzen bestimmt wurden, NO, fehlt in dieser Abbildung, da es nicht möglich war, Angaben für den Molekülquerschnitt dieses Gases aus der inneren Reibung zu finden.

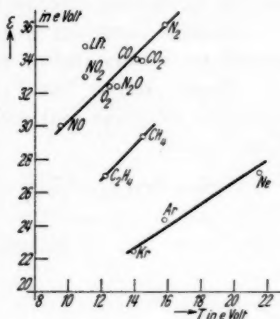


Abb. 10. Zusammenhang zwischen der Energie pro Trägerpaar und der Trägerbildungsspannung

2. Bei den Gasen NO , NO_2 und N_2O wurden Abweichungen vom Gesetz der Additivität beobachtet; es machen sich sowohl Wertigkeits- wie Bindungseinflüsse geltend.

3. Es konnte festgestellt werden, daß das Bremsvermögen wesentlich durch die Stoßzahl auf der Wegeinheit, d. h. durch den Molekülquerschnitt der Gase beeinflußt wird.

Die vorliegende Arbeit wurde auf Anregung und unter Leitung von Herrn Prof. Dr. A. Becker im Philipp-Lenard-Institut der Universität Heidelberg durchgeführt.

Meinem verehrten Lehrer danke ich herzlich für die mir zuteil gewordene Unterstützung und stetige wissenschaftliche Förderung.

Ebenso danke ich Fräulein Dr. I. Schaper für das immerwährende Interesse und die hieraus sich ergebenden Ratschläge für diese Arbeit.

Heidelberg, Philipp-Lenard-Institut.

(Eingegangen 26. März 1939)

**Über die Elektronenemission von Kupfer,
Silber und Aluminium beim Auftreffen von Ionen
großer Geschwindigkeit**

Von E. Grassmann

(Mit 8 Abbildungen)

Einleitung

Wegen der vielseitigen Anwendung von Ionenstrahlen hat sich die Notwendigkeit ergeben, genaue Ionenstrommessungen durchzuführen. Dies stößt jedoch auf Schwierigkeiten, da die auf den Auffänger auftreffenden Ionen Elektronen auslösen, und somit ein größerer Ionenstrom vorgetäuscht wird. Messungen über diese Elektronenemission bestehen nicht in dem Maße, um die Fehler durch Rechnung zu eliminieren.

Um diesen Schwierigkeiten zu entgehen, werden oftmals Faraday-Käfige zur Ionenstrommessung verwendet. C. Hailer¹⁾ wies jedoch nach, daß ohne besondere Hilfsmittel diese Anordnung auch nicht immer zum Ziele führt.

Um einen Eindruck von der Größe der bei Ionenstrommessungen möglichen und vielleicht oftmals unterschätzten Fehlern zu geben, erscheint es angebracht, nachstehende Ergebnisse zu veröffentlichen, die sich im Rahmen anderweitiger Untersuchungen ergaben. Die Ergebnisse wurden mit einem Kanalstrahlrohr üblicher Bauart, also nicht mit einer Spezialausführung erhalten. Das verwendete Kanalstrahlrohr hatte keine Nachbeschleunigungsstufe; der Kanalstrahl unterlag nicht der Wirkung eines Magnetfeldes, war also inhomogen in bezug auf die Maße und Geschwindigkeit der Ionen. Es lagen hier also dieselben Umstände wie wohl in den meisten Fällen beim Arbeiten mit Kanalstrahlen vor.

Die Zahl der neutralen Teilchen in dem Kanalstrahl hängt wesentlich von dem Druck in dem Raume hinter der Kathode ab. Da dieser Raum durch ein kurzes Rohr von großem Querschnitt mit der Pumpe (Leybold, Modell Q) verbunden war, wird der Druck zu niedrig gewesen sein, um durch Umladung neutrale Teilchen in großer Zahl zu schaffen. Im folgenden ist jedenfalls von diesen

1) C. Hailer, Wiss. Veröffentl. a. d. Siemens-Werken XVII. Heft 3.

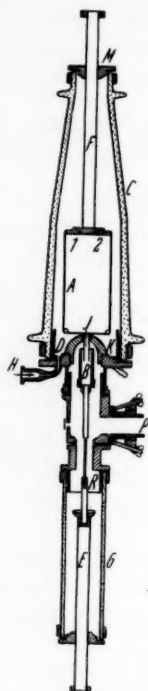


Abb. 1.
Kanalstrahlrohr
mit Auffänger B

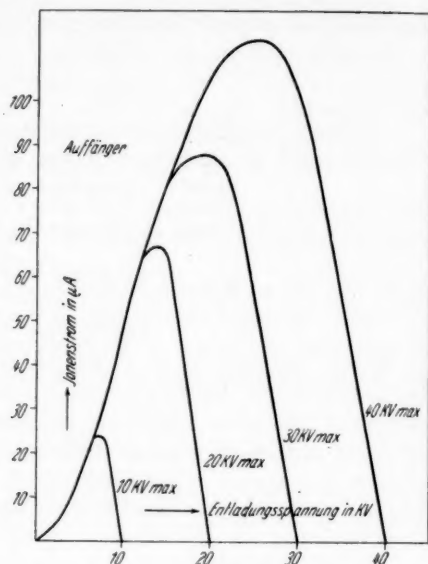


Abb. 2

Abb. 2.
Ionenstrom mit dem Auf-
fänger B gemessen.
(Ausgangsspannung
als Parameter)

Abb. 3.
Ionenstrommessung
mit einem Cu-Teller.
(Ausgangsspannung 40 kV)

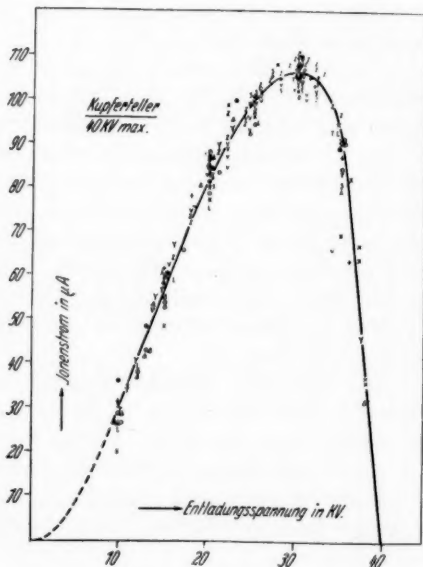


Abb. 3

neutralen Teilchen abgesehen worden, die sich der Ionenstrommessung entziehen, aber zur Elektronenemission beitragen und somit eine erhebliche Komplikation bedeuten.

Versuchsanordnung und Ergebnisse

Die Ionenströme wurden mit einem Kanalstrahlrohr¹⁾ erzeugt, das in Abb. 1 schematisch dargestellt ist, und mit dem Auffänger *B* bei Ausgangsspannungen von 40, 30, 20 und 10 kV gemessen (Abb. 2). (Unter der Ausgangsspannung wird im folgenden die Spannung verstanden, die an den evakuierten, nicht in Betrieb befindlichen Entladungsteil des Kanalstrahlrohres gelegt wird, und unter der Entladungsspannung diejenige, die während des Betriebes am Rohr liegt und durch die Gaszufuhr in weiten Grenzen regelbar ist.)

Wie weit mit diesem Auffänger der absolute Stromwert gemessen wird, hängt von dem Metall des Auffängers, seiner Oberflächenbeschaffenheit und von Art und Geschwindigkeit der Ionen ab.

Bedingt wird dieser Zusammenhang durch die mehr oder weniger große Fähigkeit des Auffängermaterials, beim Auftreffen von Ionen Elektronen zu emittieren.

Verwendet man statt des zylindrischen Auffängers einen Metallteller, wie es für spezielle Untersuchungen der Fall ist, so macht sich die Emissionsfähigkeit des Metalls bedeutend stärker bemerkbar, und zwar so, daß ein höherer Ionenstrom vorgetäuscht wird. Bei Tellern aus verschiedenen Metallen werden sich wegen der verschiedenen Emissionsfähigkeiten auch verschiedene Ionenstrommeß-

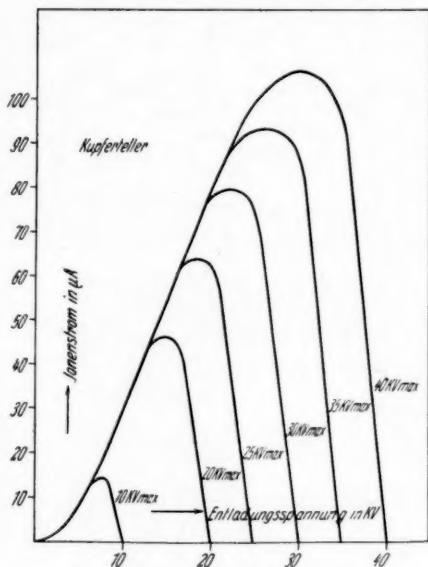


Abb. 4. Ionenstrommessung mit einem Cu-Teller.
(Ausgangsspannung als Parameter)

1) Firma Seemann, Freiburg/Br.

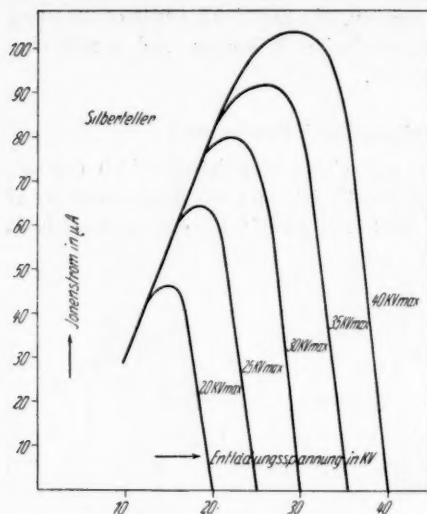


Abb. 5. Ionenstrommessung
mit einem Ag-Teller.
(Ausgangsspannung als Parameter)

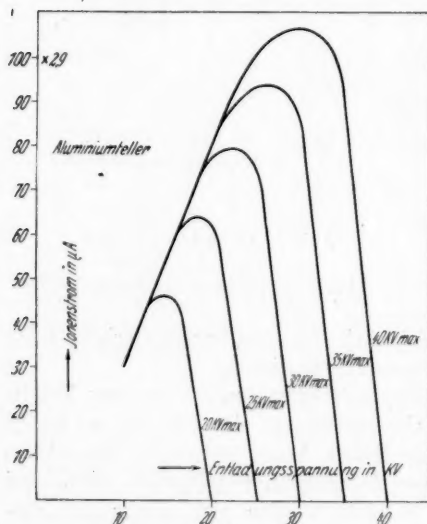


Abb. 6. Ionenstrommessung
mit einem Al-Teller.
(Ausgangsspannung als Parameter)

werte ergeben. Ionenstrommessungen wurden mit je einem Teller aus Kupfer, Silber und Aluminium durchgeführt.

Da vorerst der relative Einfluß des Metalls interessierte, blieb der Ionenstrom in bezug auf die Geschwindigkeit und die Masse seiner Teilchen — der Einfachheit halber wurde das Kanalstrahlrohr mit Luft betrieben — inhomogen.

Die Reproduzierbarkeit der Messungen wurde dadurch geprüft, daß mit einem Kupferteller, der vor jeder Meßreihe in gleicher Weise¹⁾ gereinigt worden war, Ionenstrommessungen bei gleichen Versuchsbedingungen über eine Zeit von fast drei Monaten vorgenommen wurden, bei einer Ausgangsspannung von 40 kV. Die Meßwerte sind in der Abb. 3 niedergelegt.

Es zeigt sich dabei zunächst, daß sich der charakteristische Verlauf der Kurve im Vergleich zur Abb. 2 trotz der Vergrößerung des Kanalstrahlweges — der Teller befand sich stets in Höhe

1) 1. Entfetten mit Xylol oder Alkohol. 2. Reinigung mit Salpetersäure. 3. Waschen und Trocknen.

des Teiles E (Abb. 1) — und trotz des Ersatzes des Auffängers B durch einen Teller kaum geändert hat.

Die Abb. 4, 5 und 6 zeigen die Ergebnisse für Teller aus Cu, Ag und Al.

Um den Einfluß der Ionengeschwindigkeit auf die Elektronenemission festzustellen, wurden Ausgangsspannungen von 35, 30, 25, 20 kV angelegt. Die Ordinaten der Abb. 6 wurden zum Vergleich um den Faktor 2,9 verkürzt. Um denselben Faktor liegen also entsprechende Werte der Abb. 6 höher als bei den Abb. 4 und 5.

Aus den Abb. 4—6 ergibt sich, daß innerhalb der Meßfehler Silber und Kupfer die gleichen Meßwerte liefern, während Aluminium zu 2,9mal so großen Werten führt.

Über die Emissionsfähigkeit der drei Materialien kann man jedoch nur eine Aussage machen, wenn es gelingt, den wahren Ionenstrom zu messen.

Zu diesem Zweck wurden Kupferzylinder unmittelbar auf den Kupferteller gestellt, weil zu erwarten war, daß so wenigstens ein Teil der ausgelösten Elektronen wieder eingefangen wird und damit die Ionenstrommessung nicht fälscht. Für die Meßreihe Abb. 7 wurde ein Kupferzylinder von 45 mm Durchmesser und 61 mm Höhe verwendet; für die zweite Meßreihe, Abb. 8, wurde an diesen Zylinder ein weiterer Kupferzylinder von 42 mm Durchmesser und 50 mm Höhe derart angesetzt, daß beide Zylinder zusammen eine Höhe von etwa 100 mm ergaben.

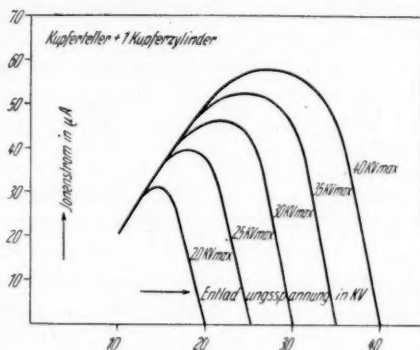


Abb. 7. Ionenstrommessung mit Cu-Teller + 1 Cu-Zylinder. (Ausgangsspannung als Parameter)

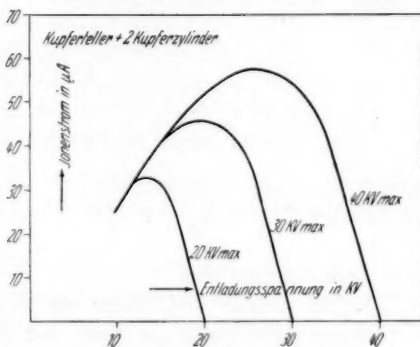


Abb. 8. Ionenstrommessung mit Cu-Teller + 2 Cu-Zylinder. (Ausgangsspannung als Parameter)

Wie die Abb. 7 und 8 zeigen, führte die Verwendung von zwei Kupferzylindern zu denselben Ergebnissen wie die von nur einem Zylinder. Das legt den Schluß nahe, daß es schon bei Verwendung eines einzigen Zylinders gelungen war, sämtliche Elektronen einzufangen und damit den tatsächlichen Ionenstrom zu messen.

Für die quantitative Auswertung dieser Ergebnisse (Tab. 1) wurden die maximalen Ionenströme (Spalte 2) bei den verschiedenen Ausgangsspannungen (Spalte 1) zusammengestellt. [Die Abkürzung Cu + 2 Zyl. bezeichnet darin die mit der Anordnung (Kupferteller + 2 Kupferzylinder) gemessenen maximalen Ionenströme.] Die Werte bei Verwendung von 1 und 2 Cu-Zylindern sind in der Tabelle mit 100 % angesetzt.

Tabelle 1

	Ausgangsspannung in kV	Kupferteller			Silberteller			Aluminiumteller		
		max. Ionenstrom bezog. auf Cu + 2 Zyl. = 100 % in %		Elektronen- emis. in %	max. Ionenstrom bezog. auf Cu + 2 Zyl. = 100 % in %		Elektronen- emis. in %	max. Ionenstrom bezog. auf Cu + 2 Zyl. = 100 % in %		Elektronen- emis. in %
		in μ A			in μ A			in μ A		
0 Zyl.	40	107	186	86	107	186	86	310	540	440
	35	94	179	79	94	179	79	272	518	418
	30	80	178	78	80	178	78	232	515	415
	25	64	162	62	64	162	62	185	468	368
	20	46,5	141	41	47	141	41	135	400	300
+ 1 Cu- Zyl.	40	58	100	0						
	35	52,5	100	0						
	30	46	100	0						
	25	39,5	100	0						
+ 2 Cu- Zyl.	40	57,5	100	0						
	30	45	100	0						
	20	33	100	0						

Daraus ergibt sich

1. daß Kupfer und Silber als Material für die Auffangplatte die Ionenstrommessung je nach der Höhe der Ausgangsspannung um 41–86 %, Aluminium um 300–440 % fälscht; 2. daß die Emissionsfähigkeit von Kupfer und Silber einander gleich und 5–7 mal kleiner als die von Aluminium ist und 3. daß die Emissionsfähigkeit von Kupfer und Silber mit wachsender Ionen- geschwindigkeit stärker zunimmt als die von Aluminium.

Eine Gegenüberstellung der Werte von Füchtbauer¹⁾ — Tab. 2 — zeigt, daß auch hier Kupfer und Silber die gleiche

1) Füchtbauer, Handb. d. exp. Phys. Bd. XIV. S. 476.

Emissionsfähigkeit haben. Für Aluminium ergeben sich allerdings Werte, die nur etwa 2—3 mal größer sind.

Tabelle 2
Sekundäremission nach Füchtbauer

Spannung in kV	15	16	21,5	31,5
Kupfer	89%	96,5%	103%	136%
Silber	87	98	110	137
Aluminium	198	222	265	305

Will man diese Werte der Tab. 2 mit denen vorliegender Arbeit vergleichen, so muß man berücksichtigen, daß die Ionen- geschwindigkeiten nicht ohne weiteres vergleichbar sind. Die maxi- malen Ionenströme bei einer Ausgangsspannung von 40 kV liegen (vgl. Abb. 3—8) bei einer Entladungsspannung von etwa 30 kV. Nimmt man an, daß die meisten von diesen Ionen eine Geschwindigkeit erlangen, die der halben Entladungsspannung entspricht, so wären das bei der vorherrschenden Ionen- geschwindigkeit in dem bei 40 kV Ausgangsspannung und 30 kV Entladungsspannung erhaltenen Ionen- strom: 15 kV. Entsprechend ergibt sich für die häufigste Ionen- geschwindigkeit bei

Ausgangsspannung von 35 kV etwa 13 kV
Ausgangsspannung von 30 kV etwa 11 kV
Ausgangsspannung von 25 kV etwa 9 kV und
Ausgangsspannung von 20 kV etwa 7 kV.

In nachstehender Tab. 3 ist die Sekundärstrahlung in Abhängig- keit von dieser geschätzten Ionen- geschwindigkeit — kV — angegeben.

Tabelle 3

Ionen- geschwindigkeit in kV	7	9	11	13	15
Kupfer	41%	62%	78%	79%	86%
Silber	41	62	78	79	86
Aluminium	300	368	415	418	440

Diese Werte schließen sich also für Kupfer und Silber gut an die von Füchtbauer (Tab. 2) an, obwohl die Versuchsbedingungen sicher voneinander abwichen. Die Ergebnisse für Aluminium sind dagegen nicht in Einklang zu bringen.

Aus den Versuchsergebnissen geht wohl eindeutig der übertragende Einfluß der Elektronenemission hervor und auch die Schwierigkeiten, die sich einer genauen Ionenstrommessung in den Weg stellen.

Zusammenfassung

Mit einem inhomogenen Ionenstrahl wird die Elektronenemission von Kupfer, Silber und Aluminium gemessen. Sie ist für Kupfer und Silber etwa gleich, für Aluminium dagegen 5—7 mal größer und nimmt für erstere stärker mit der Ionengeschwindigkeit zu als für Aluminium.

Bei Ionengeschwindigkeiten zwischen 7 und 15 kV beträgt die Elektronenemission 40—86 % der auftretenden Ionenmenge für Kupfer und Silber, 300—440 % für Aluminium.

Nürnberg, Lenbachstr. 20.

(Eingegangen 23. März 1939)